



Résonances d'objets élastiques en géométries elliptique et sphéroïdale : symétrie et levée de dégénérescence

Emmanuelle Bazzali

► To cite this version:

Emmanuelle Bazzali. Résonances d'objets élastiques en géométries elliptique et sphéroïdale : symétrie et levée de dégénérescence. Acoustique [physics.class-ph]. Université de Corse, 2014. Français. NNT : . tel-01150073

HAL Id: tel-01150073

<https://theses.hal.science/tel-01150073>

Submitted on 8 May 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITE DE CORSE-PASCAL PAOLI
ECOLE DOCTORALE ENVIRONNEMENT ET SOCIETE
UMR CNRS 6134 (SPE)



**Thèse présentée pour l'obtention du grade de
DOCTEUR EN MECANIQUE DES FLUIDES, ENERGETIQUE,
THERMIQUE, COMBUSTION, ACOUSTIQUE
Mention : Mécanique, génie mécanique, génie civil**

Soutenue publiquement par

Emmanuelle BAZZALI

le 16 décembre 2014

**Résonances d'objets élastiques en géométries elliptique et sphéroïdale :
symétrie et levée de dégénérescence**

Directeur :

M. Paul Gabrielli, Professeur, Université de Corse

Co-directeur :

M. Stéphane Ancey, Dr, Université de Corse

Rapporteurs :

M. Bertrand Dubus, DR, Université de Lille 1

M. Jean-Marc Conoir, DR, Université Pierre et Marie Curie

Jury

M. Olivier Legrand, Professeur, Université de Nice Sophia-Antipolis

M. Bertrand Dubus, DR, Université de Lille 1

M. Jean-Marc Conoir, DR, Université Pierre et Marie Curie

M. Paul Gabrielli, Professeur, Université de Corse

M. Stéphane Ancey, Dr, Université de Corse

Membre invité

M. Jean-Pierre Sessarego, DR, LMA

Dans la vie, rien n'est à craindre, tout est à comprendre.
Marie Curie

REMERCIEMENTS

COMME une évidence, je tiens à remercier en tout premier mon directeur de thèse, Paul Gabrielli. Les mots me manquent pour dire combien je te suis reconnaissante. Tout d'abord, merci pour la confiance que tu m'as accordée il y a 3 ans afin de débiter une thèse sous ta direction. Depuis, j'ai appris à tes côtés, accompagnée de tes nombreuses qualités scientifiques et humaines. Pour ta complète disponibilité et toutes ces heures passées à collaborer, merci. Il faut avouer qu'avec mon caractère bien trempé, encadrer ma thèse n'a pas dû être de tout repos ! Mais tu as su composer avec nos tempéraments respectifs et faire preuve d'une immense patience avec moi. Tu m'as guidée, accompagnée et soutenue avec honnêteté et justesse dans les moments de doutes, tant sur le plan professionnel que personnel. Merci !

Je souhaite également remercier Stéphane Ancey, co-directeur de cette thèse. Merci pour tes conseils durant ces 3 années. Merci également d'avoir partagé avec moi ta rigueur scientifique. Je voudrais également te remercier pour tes blagues que je n'ai pas répertoriées ici, il aurait fallu y consacrer plusieurs pages !

Je ne peux évidemment pas oublier de remercier Michaël Mercier, dont la disponibilité et l'efficacité m'ont été d'une grande aide au cours de cette thèse. Merci pour ton énergie et ta bonne humeur ainsi que pour tous les conseils que tu as pu me donner. Je te remercie de t'être autant impliqué dans ma thèse.

Toute ma gratitude va aussi à Bertrand Dubus et Jean-Marc Conoir pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse ainsi qu'à Olivier Legrand et Jean-Pierre Sessarego d'avoir bien voulu faire partie de mon jury.

Un immense merci à Marina. Il y a des gens avec qui on « accroche » de suite. Parmi eux, certains deviennent des amis. Il arrive que parmi ces amis, se trouve une personne qui t'adopte, que tu adoptes et qui devient ta famille. Marina, pour te citer : « Manue, la famille on peut la choisir ». Sache qu'aujourd'hui tu fais partie de la famille que j'ai choisie. Tu m'as supportée (parfois trop), soutenue, conseillée, rassurée et aidée tout au long de ma thèse. Les mots ne suffisent pas pour te dire à quel point je te remercie. Merci également à tes parents et à Sylvain.

Les personnes qui me connaissent très bien pourraient vous dire que le chemin qui m'a menée à faire cette thèse a été long. Elles savent que le parcours n'a pas toujours été des plus calmes. En particulier, je remercie ma mère pour m'avoir supportée, dans tous les sens du terme, depuis toujours. Merci également à mes soeurs, Ophélie et Lauredana. Vous avez su me conseiller et me dire les choses avec la plus grande honnêteté. Je vous entends d'ici dire « Mais c'est normal Emmanuelle ! ».

Je ne peux m'empêcher, en rédigeant ces remerciements, d'avoir une pensée amusée

pour ceux qui ont contribué à certaines complications au cours de mon parcours. Pour détourner les mots de Nietzsche, je dirais que ce qui ne nous arrête pas dans ce que l'on entreprend nous rend plus fort. Ne voyez pas dans ces mots de la prétention, juste un zeste de satisfaction agrémenté d'un sourire au moment où je rédige ces quelques lignes.

Un grand merci à Serena, mon amie depuis toujours, ma meilleure pâtissière ! Merci d'avoir mis tes talents culinaires au service de mon pot de thèse. Merci surtout d'être là depuis toutes ces années, comme on dit : « Un ami, c'est quelqu'un qui sait tout de vous et qui vous aime quand même ».

Je pense également à Bastien, à nos moments « relax » *thé-café-champignons-houmous* et nos discussions « Happiness therapy » ! Et voilà, on est arrivé au bout, « notre peuple vaincra » ! Merci aussi pour tes petits mots qui remontent le moral quand ça va pas fort. Petite requête pour l'avenir : on n'oublie pas de répondre aux SMS de tata Manue !!!

Merci à Battì, Fred et Meriem, un trio avec lequel j'ai passé des moments géniaux au cours de ces 3 années de thèse. Les amis, merci d'avoir détendue la petite boule de stress en laquelle je me transforme parfois ! Meriem, pour m'avoir fait rire comme peu de gens savent le faire, merci ! Fred et Battì, sans vous dans ce couloir, j'aurais complètement craqué par moment ! Comme tu dis souvent Fred, lorsque vous n'êtes pas là : « Eh Manue, est-ce que tu survis sans nous ? ». Battì, rares sont ceux qui, comme toi, ont réussi à sortir ma tête du guidon et ce, malgré mon entêtement à toute épreuve : « Non, j'ai pas le temps, je veux pas partir du labo ! ». Merci de ne pas avoir jeté l'éponge et d'avoir su me changer les idées quand ça devenait quasiment vital !

Merci à Denis, dont l'amour pour ses montagnes n'est pas sans rappeler le mien pour la Corse. Mais ce n'est pas notre seul point commun. Un autre est sans doute notre goût prononcé pour la recherche. Merci de m'avoir soutenue lorsque j'étais en proie au doute quant à mon avenir et que je voyais s'approcher de moi la baraque à frites ou l'élevage des lamas au Pérou !

Je tiens également à remercier Yann Quilichini qui a ajouté une petite pierre dans mon « édifice » en me permettant d'analyser mes éprouvettes au microscope électronique à balayage. Merci pour le temps que tu as consacré pour réaliser mes analyses, exploiter au maximum les résultats fournis par l'appareil et m'expliquer en détail les observations que nous faisions.

Merci à Marie et Christelle, pour l'aide et les conseils qu'elles ont su m'apporter à l'approche de ma soutenance.

Une pensée également pour ceux qui ont contribué à rendre la vie d'un thésard au sein de l'université plus sympathique, plus simple : Antoine Pieri, Marianne Morès , Nelly Renucci, Laetitia Bachetti, David Moungar...

Enfin, un merci tout particulier à Morgan, pour sa patience et son soutien. Malgré certains sacrifices, tu m'as toujours encouragée à poursuivre cette aventure dans le monde de la recherche, tu as toujours cru en moi. Pour cela et pour tellement d'autres choses encore, merci.

Corte, le 30 janvier 2015.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES FIGURES	viii
INTRODUCTION	1
1 THÉORIE DES GROUPE ET SYMÉTRIES	7
1.1 RAPPELS SUR LA THÉORIE DES GROUPE	9
1.1.1 Groupes de symétrie	9
1.1.2 Représentations irréductibles et table des caractères d'un groupe	9
1.2 CONSIDÉRATIONS DE SYMÉTRIE	10
1.2.1 La géométrie elliptique et le groupe de symétrie C_{2v}	10
1.2.2 La géométrie sphéroïdale et le groupe de symétrie $D_{\infty h}$	15
CONCLUSION DU CHAPITRE	17
2 MODES RÉSONANTS EN GÉOMÉTRIE ELLIPTIQUE	19
2.1 MODES RÉSONANTS : GÉNÉRALITÉS	21
2.2 MODES RÉSONANTS D'UN DISQUE ELLIPTIQUE ÉLASTIQUE	21
2.2.1 Position du problème	21
2.2.2 Détermination des modes résonants : résolution du problème propre	22
2.2.3 Le déplacement élastique	27
2.3 RÉSULTATS NUMÉRIQUES	28
2.3.1 Considérations numériques	28
2.3.2 Modes résonants et interprétation physique	30
2.4 LES ORBITES PÉRIODIQUES	34
2.4.1 Généralités	34
2.4.2 Le calcul des longueurs des orbites périodiques	35
2.4.3 Spectres des longueurs des orbites périodiques	41
CONCLUSION DU CHAPITRE	50
3 DIFFUSION ACOUSTIQUE EN GÉOMÉTRIE ELLIPTIQUE	51
3.1 GÉNÉRALITÉS SUR LA DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR UN OBJET DE FORME SIMPLE	53
3.2 ÉTUDE THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE	53
3.2.1 Position du problème	53
3.2.2 Écriture des conditions aux limites	54
3.2.3 Détermination des quantités physiques	62
3.2.4 Résultats numériques	63
3.3 ÉTUDE EXPÉRIMENTALE ET COMPARAISON THÉORIE/EXPÉRIENCE	68
3.3.1 Description du dispositif d'excitation et de mesure	68
3.3.2 Description du dispositif expérimental	70
3.3.3 Insonification par une onde plane et considérations de symétrie	71

3.3.4	Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux	71
	CONCLUSION DU CHAPITRE	82
4	Modes résonants et onde de Rayleigh en géométrie sphéroïdale	85
4.1	Génération et détection optiques d'ondes élastiques	87
4.1.1	Génération d'ondes élastiques par impact laser	87
4.1.2	Détection sans contact	91
4.2	Dispositif expérimental	92
4.2.1	Présentation	92
4.2.2	Excitation sans contact par laser impulsif	94
4.2.3	Mesure sans contact par vibrométrie laser	97
4.2.4	Acquisition et traitement des données	98
4.3	Étude dans le domaine temporel	100
4.3.1	Configuration émission - détection à 90°	102
4.3.2	Configuration émission - détection à 180°	106
4.4	Étude dans le domaine fréquentiel	111
4.4.1	Spectre des résonances et levée de dégénérescence	111
4.4.2	Spectre des résonances et spectre des longueurs des orbites périodiques . . .	116
	CONCLUSION DU CHAPITRE	122
	CONCLUSION	125
A	ANNEXES	129
A.1	Éléments de géométrie elliptique	131
A.1.1	Coordonnées elliptiques	131
A.1.2	Intégrales elliptiques	132
A.2	Décomposition selon les représentations irréductibles du groupe \mathcal{C}_{2v} . .	133
A.2.1	Propriétés de parité des coefficients inconnus	133
A.2.2	Expressions des champs scalaires dans les représentations irréductibles . . .	134
A.3	Les fonctions de structure	136
A.4	Réduction de la somme sur p et restriction au domaine fondamental .	137
A.5	Coefficients de Fourier pour le problème intérieur	138
A.6	Coefficients de Fourier pour la diffusion	139
A.7	Calculs des longueurs des orbites périodiques selon Sieber	139
	BIBLIOGRAPHIE	141

LISTE DES FIGURES

1.1	Transformations de symétrie.	10
1.2	Disque elliptique décrit dans le système de coordonnées polaires.	11
1.3	Action des transformations de symétrie sur les vecteurs de base \mathbf{e}_ρ et \mathbf{e}_θ	13
2.1	Géométrie du problème.	21
2.2	Suivi des résonances en fonction de l'excentricité e	31

2.3	Levée de dégénérescence (\circ, A_1); (\cdot, A_2), indice angulaire n pair.	31
2.4	Levée de dégénérescence (\times, B_1); ($+, B_2$), indice angulaire n impair.	32
2.5	Interaction entre les modes résonants.	32
2.6	Déformées modales.	33
2.7	Exemples d'orbites périodiques.	36
2.8	Géométrie d'une trajectoire périodique arbitraire.	37
2.9	Conversion de mode et loi de Snell.	38
2.10	Orbites périodiques $n = 3, m = 1$ avec mouvement de rotation.	39
2.11	Orbites périodiques $n = 4, m = 1$ avec mouvement de libration.	41
2.12	Spectre des orbites périodiques pour un disque circulaire en aluminium. . . .	44
2.13	Spectre des orbites périodiques disque elliptique aluminium $b/a = 0,9414$. . .	45
2.14	Spectre des orbites périodiques disque elliptique aluminium $b/a = 0,9051$. . .	46
2.15	Spectre des orbites périodiques disque elliptique aluminium $b/a = 0,8337$. . .	47
2.16	Spectre des orbites périodiques disque elliptique aluminium $b/a = 0,8337$. . .	48
2.17	Mise en évidence de la séparation en trajets extrémaux	49
3.1	Géométrie du problème.	53
3.2	Levée de dégénérescence du mode (1,2).	66
3.3	Levée de dégénérescence du mode (3,2).	67
3.4	Dispositif ultrasonore expérimental utilisé pour la méthode impulsionnelle. . .	69
3.5	Dispositif ultrasonore expérimental utilisé pour la méthode quasi-harmonique. .	70
3.6	Identification des modes résonants.	73
3.7	Modes (1,6) et (3,4) en B_1 et B_2 , cylindre elliptique $b/a = 0,9640$	75
3.8	Comparaison théorie/expérience cylindre $b/a = 0,9640$ incidence oblique. . . .	77
3.9	Comparaison théorie/expérience cylindre $b/a = 0,9051$ incidence oblique. . . .	78
3.10	Comparaison théorie/expérience cylindre $b/a = 0,9051$ incidence petit axe. . . .	79
3.11	Comparaison théorie/expérience cylindre $b/a = 0,9051$ incidence grand axe. . . .	80
3.12	Comparaison théorie/expérience cylindre $b/a = 0,6351$ incidence oblique. . . .	81
3.13	Comparaison théorie/expérience cylindre $b/a = 0,5370$ incidence oblique. . . .	81
3.14	Comparaison HF théorie/expérience cylindre $b/a = 0,7616$ incidence oblique. . .	82
4.1	Régime thermoélastique	88
4.2	Régime d'ablation	88
4.3	Diagrammes de directivités en régime thermoélastique [Royer 1996].	89
4.4	Diagrammes de directivités en régime d'ablation [Royer 1996].	90
4.5	Schéma de principe du dispositif de vibrométrie laser.	91
4.6	Configuration optique de l'interféromètre dans la tête de mesure.	92
4.7	Montage expérimental.	93
4.8	Sphéroïdes de forme prolata et de forme oblate.	94
4.9	Spectre de l'impulsion laser dans le cas d'un profil gaussien.	95
4.10	Spectre de l'impulsion laser dans le cas d'un profil en sécante hyperbolique. .	96
4.11	Surface de l'objet observée au Microscope Électronique à Balayage.	96
4.12	Surface de l'objet observée au Microscope Électronique à Balayage zoom $\times 700$. .	97
4.13	Spectre de Fourier d'une mesure « à vide ».	98
4.14	Détection expérimentale des résonances.	99
4.15	Trajets parcourus par l'onde de Rayleigh en géométrie sphéroïdale.	100
4.16	Configuration émission-détection à 90° pour les sphéroïdes P_4 et O_5	102
4.17	Signal temporel P_4 sur N tours de propagation, émission - détection 90°	103
4.18	Signal temporel O_5 sur N tours de propagation, émission - détection 90°	103
4.19	Signal temporel P_4 sur le 1 ^{er} tour de propagation, émission - détection 90° . . .	104

4.20	Signal temporel O_5 sur le 1 ^{er} tour de propagation, émission - détection 90° . . .	105
4.21	Signal temporel P_4 sur les 1 ^{ers} tours de propagation, émission - détection 90° . .	105
4.22	Signal temporel O_5 sur les 1 ^{ers} tours de propagation, émission - détection 90° . .	106
4.23	Configuration émission-détection à 180° pour les sphéroïdes P_4 et O_5	106
4.24	Signal temporel P_4 sur N tours de propagation, émission - détection 180°	107
4.25	Signal temporel O_5 sur N tours de propagation, émission - détection 180° . . .	107
4.26	Signal temporel P_4 sur le 1 ^{er} tour de propagation, émission - détection 180° . .	108
4.27	Signal temporel O_5 sur le 1 ^{er} tour de propagation, émission - détection 180° . .	109
4.28	Signal temporel P_4 sur les 1 ^{ers} tours de propagation, émission - détection 180° . .	110
4.29	Signal temporel O_5 sur les 1 ^{ers} tours de propagation, émission - détection 180° . .	110
4.30	Modes propres de vibration d'une sphère élastique.	112
4.31	Visualisation de l'indice m pour le mode ${}_0S_6$	112
4.32	Spectre des résonances pour une sphère en Aluminium 2017A.	113
4.33	Mise en évidence de la levée de dégénérescence.	114
4.34	Mise en évidence de la levée de dégénérescence du mode ${}_0S_1$	115
4.35	Mise en évidence de la levée de dégénérescence du mode ${}_1S_3$	116
4.36	Spectres des résonances complet et sans modes toroïdaux de la sphère.	118
4.37	Comparaison théorie/expérience des spectres des OP d'une sphère.	119
4.38	Comparaison calcul numérique (éléments finis)/expérimental pour O_3	120
4.39	Spectre expérimental des OP pour le sphéroïde prolata P_4	121
4.40	Spectre expérimental des OP pour le sphéroïde oblate O_5	122
A.1	Ellipse.	131
A.2	Système de coordonnées elliptiques.	132

INTRODUCTION

LES phénomènes résonants pour des objets élastiques de forme simple ont été largement étudiés au cours des dernières décennies, que ce soit dans le cadre de problèmes de diffusion acoustique ou d'élastodynamique.

La plupart des travaux réalisés en diffusion pour des objets cylindriques est consacrée au cas particulier des cylindres ayant une section circulaire [Veksler 1993]. En comparaison, peu d'attention a été portée au cas plus général de la géométrie elliptique (cylindres elliptiques) [Bowman et al. 1970], notamment du point de vue expérimental. Des résultats expérimentaux pour des diffuseurs de section elliptique sont présentés dans les références [Chinnery et Humphrey 1998, Pereira et al. 2002]. Plus récemment, Léon *et al.* ont appliqué le formalisme modal pour traiter le problème de la diffusion acoustique par des cylindres élastiques de section quelconque, immergés dans un fluide [Léon et al. 2004]. Ils ont ensuite comparé leurs résultats théoriques et expérimentaux.

Plusieurs méthodes peuvent être appliquées pour traiter les problèmes de diffusion dans le cas d'une géométrie non circulaire. Les développements en fonctions de Mathieu sont bien adaptés aux études portant sur les cylindres elliptiques non élastiques. La méthode de la matrice S est efficace pour traiter les diffuseurs élastiques quelle que soit la géométrie non circulaire [Varadan 1978; 1980, Pillai et al. 1982, Simon et Raddlinski 1982, Raddlinski et Simon 1993]. Le formalisme modal appliqué dans la référence [Léon et al. 2004] est similaire à cette approche, la matrice T pouvant être extraite à partir de ce formalisme. On peut également citer les méthodes intégrales utilisant les fonctions de Green, conduisant aux équations intégrales de Fredholm [Goel et Jain 1981, Veksler et al. 1999] et la méthode « Fourier Matching Method » utilisant les transformations conformes [DiPerna et Stanton 1994].

Le problème de diffusion peut être étudié en relation avec d'autres problèmes tels que, par exemple, la détermination des modes résonants en élastodynamique. En effet, bon nombre de techniques utilisées dans le contexte de la diffusion (Matrice S [Varatharajulu et Pao 1976], formalisme modal [Léon et al. 2004]) peuvent y être transposées.

Concernant les modes résonants d'objets élastiques, les géométries les plus courantes sont présentées dans la référence [Love 1906].

En 1882, Lamb a été le premier à résoudre de façon exacte le problème des oscillations libres d'une sphère élastique isotrope et homogène [Lamb 1882]. Les modes résonants d'objets élastiques pour diverses géométries ont été calculés à partir d'une méthode variationnelle (principe de Hamilton) introduite dans la référence [Visscher et al. 1991]. Plus récemment, une classification des modes sphéroïdaux d'une sphère élastique a été réalisée [Saviot et Murray 2005]. En géométrie sphéroïdale, Jaerish a donné pour la première fois les équations permettant d'obtenir les modes toroïdaux d'un sphéroïde élastique de forme prolate [Jaerish 1880] qui ont été résolues près d'un siècle plus tard [Rand 1968]. Dans le cas de la forme oblate, ces modes ont été déterminés pour une application en physique de la matière condensée [Hernández-Rosas et al. 2003]. En géométrie circulaire, les fréquences propres d'un disque élastique ont été étudiées, ainsi que leur lien avec les trajectoires périodiques à l'intérieur du domaine circulaire [Tanner et Søndergaard 2002].

Ce lien entre le spectre des résonances et le spectre des longueurs des orbites périodiques a été étudié en géométrie elliptique [Sieber 1997, Magner et al. 1999], en géométrie sphéroïdale [Nishioka et al. 1991; 1992, Arita et al. 1997; 1998; 2002, Magner et al. 2002] et en géométrie ellipsoïdale [Casas et Ramírez-Ros 2012] en considérant des cavités avec des conditions aux limites de Dirichlet. Les travaux de ces auteurs ne s'inscrivent donc pas dans le contexte de l'élastodynamique qui constitue le cadre de ce travail.

Dans cette thèse, nous étudions les résonances d'objets élastiques pour le problème intérieur et le problème de diffusion acoustique, en géométries elliptique et sphéroïdale. Le problème intérieur consiste en l'étude des modes résonants d'un solide élastique avec des conditions de bords libres. Les deux géométries traitées dans ce travail constituent des exemples de configuration en deux et trois dimensions permettant d'observer la levée de dégénérescence des résonances liée à une brisure de symétrie. Ce phénomène apparaît lors de la transition du cylindre circulaire vers le cylindre elliptique d'une part, et de la sphère vers le sphéroïde d'autre part. Nous mettons en évidence et interprétons la levée de dégénérescence en tenant compte des symétries dans la formulation des problèmes. Une modélisation numérique et une partie expérimentale viennent compléter notre approche théorique. Dans le cadre du problème intérieur, nous utilisons également le lien connu entre le spectre des résonances et le spectre des longueurs pour fournir une interprétation physique en termes d'orbites périodiques.

Dans le système de coordonnées elliptiques, l'équation d'Helmholtz peut être résolue, dans le cas scalaire, par la méthode de séparation des variables et la solution générale fait intervenir les fonctions de Mathieu [Abramowitz et Stegun 1964, Mechel 1997]. Or, ces fonctions dépendent de la vitesse de l'onde. C'est pourquoi en présence d'un milieu élastique, la coexistence des ondes longitudinales et transversales entraîne la non-séparabilité de l'équation d'Helmholtz [Varatharajulu et Pao 1976, Varadan 1978]. Nous traitons alors les problèmes en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) à partir d'un formalisme modal et nous utilisons la décomposition en série de Fourier pour séparer les variables radiale et angulaire [Varadan 1980, Léon et al. 2004]. Le même problème de non-séparabilité se pose lorsqu'on souhaite résoudre, dans le système de coordonnées sphéroïdales, l'équation d'Helmholtz dans le cas vectoriel. Une des solutions consiste à travailler en coordonnées sphériques [Varadan et Varadan Apr. 1979]. Notons toutefois qu'au début des années 80, Hackman a utilisé l'identité de Betti pour obtenir une description en terme de matrice T de la diffusion par des objets élastiques en utilisant les fonctions sphéroïdales [Hackman 1984].

Dans cette thèse, nous mettons en évidence le rôle important que jouent les symétries en physique. Ces dernières ont été largement exploitées en physique quantique [Wigner 1959, Heine 1960, Hamermesh 1989, Cornwell 1997]; par exemple, pour des applications en cristallographie, en physique atomique et moléculaire [Landau et Lifshitz 1975] mais aussi en chaos quantique [Gaspard et Rice 1989, Cvitanović et Eckhardt 1993, Leyvraz et al. 1996, Joyner et al. 2012]. En électromagnétisme, les symétries de particules diffusantes ont été prises en compte pour calculer la matrice T [Schulz et al. 1999]. Dans le contexte de l'élastodynamique, Wirzba a utilisé les représentations des groupes dans l'étude de la diffusion par des cavités élastiques [Wirzba et al. 2005], mais il ne détaille pas la méthode utilisée. Récemment, en électromagnétisme, la théorie des groupes a été utilisée pour améliorer le traitement numérique de problèmes mal conditionnés et accélérer la vitesse des calculs [Kahnert et al. 2001, Kahnert 2005, Kahnert et Rother 2011, Kahnert 2013].

Les premières utilisations de la théorie des groupes en acoustique pour simplifier et amé-

liorer les traitements théorique et numérique des problèmes de diffusion apparaissent dans les références [Decanini et al. 1999, Gabrielli et Mercier-Finidori 2001]. En adoptant la même démarche, les résonances d'une cavité elliptique ont pu être déterminées [Ancy 2000, Ancy et al. 2001]. L'idée maîtresse de la méthode développée dans ces travaux est née des considérations qui suivent.

Lorsque l'on considère les problèmes intérieur et de diffusion pour des objets de forme simple comme un cylindre (respectivement une sphère), l'invariance de l'équation d'Helmholtz sous toutes les rotations autour de l'axe du cylindre (resp. par rapport au centre de la sphère) conduit à rechercher des solutions modales par séparation des variables de la forme $f(\rho)e^{in\theta}$ (resp. $f(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi)$). Ceci est directement lié aux résultats mathématiques suivants : les fonctions $e^{in\theta}$, avec n fixé, forment une base d'une représentation irréductible bidimensionnelle du groupe $O(2)$, le groupe de symétrie du cylindre, (resp. les harmoniques sphériques $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$, avec ℓ fixé et $m = -\ell, \dots, +\ell$ forment une base d'une représentation irréductible de dimension $2\ell + 1$ du groupe $O(3)$, le groupe de symétrie de la sphère). Les résonances du cylindre circulaire sont alors 2 fois dégénérées et celles de la sphère $2\ell + 1$ fois.

Dans le cas du cylindre elliptique, l'invariance par rotation associée au groupe de symétrie $O(2)$ est brisée, mais le système demeure invariant sous les transformations du groupe fini C_{2v} . Dans le cas du sphéroïde, l'invariance par rotation associée au groupe de symétrie $O(3)$ est brisée, mais le système demeure invariant sous les transformations du groupe infini $\mathcal{D}_{\infty h}$. Les quantités physiques peuvent alors être écrites dans les représentations irréductibles des groupes de symétrie considérés.

Nous précisons que dans les travaux développés jusqu'ici à l'Université de Corse, ces quantités sont scalaires. Dans cette thèse, une des principales difficultés rencontrées a été d'étendre la méthode à l'écriture de quantités vectorielles sur les représentations.

La brisure de symétrie entraîne, comme conséquence directe, une levée de dégénérescence des résonances. Dans les problèmes abordés, chaque résonance du disque circulaire donne naissance à 2 résonances distinctes et chaque résonance de la sphère à $2\ell + 1$ résonances distinctes. Ce phénomène physique a été observé numériquement pour la première fois par Moser et Überall [Moser et Überall 1983]. Plus récemment, Chinnery et Humphrey ont discuté de « mode splittings » et de « level crossings » dans une étude des résonances d'une coque cylindrique remplie d'un fluide et immergée [Chinnery et Humphrey 1998]. Cependant, ces différents auteurs ne fournissent ni description analytique, ni explication des phénomènes observés. Dans un contexte scalaire en géométrie elliptique, la levée de dégénérescence a été mise en évidence et expliquée en utilisant la théorie des groupes [Ancy 2000, Ancy et al. 2001]. Dans le domaine des statistiques spectrales, la brisure de symétrie a été prise en compte dans des études expérimentales des propriétés spectrales de blocs en quartz [Ellegaard et al. 1996] et en aluminium [Ellegaard et al. 1995]. Cette dernière référence, en élastodynamique, suit l'approche expérimentale mise en place par Weaver [Weaver 1989], dont les résultats ont été commentés par la suite [Bohigas et al. 1991]. En physique de la matière condensée, la levée de dégénérescence liée à la brisure de la symétrie sphérique a été abordée dans la référence [Tamura et al. 1982]. En sismologie, Dahlen a étudié la levée de dégénérescence, partielle ou totale, des modes propres de vibration de la Terre, liée à sa rotation et à son ellipticité [Dahlen 1998].

Dans notre étude, nous mettons en évidence et interprétons, pour la première fois à notre connaissance, la levée de dégénérescence des résonances d'objets en géométries elliptique et sphéroïdale dans le cadre complexe d'ondes se propageant dans des solides élastiques.

Ce mémoire s'articule de la façon suivante : Le chapitre 1 présente les outils mathéma-

tiques nécessaires pour résoudre le problème intérieur et le problème de diffusion en tenant compte des symétries de l'objet. Le problème intérieur est étudié en géométries elliptique et sphéroïdale respectivement dans les chapitres 2 et 4. Le problème de diffusion est traité dans le chapitre 3 en géométrie elliptique.

Le chapitre 1 est consacré à la théorie des groupes, qui constitue le cadre mathématique rigoureux pour traiter les symétries en physique. Nous nous intéressons en particulier aux groupes de symétrie C_{2v} et $D_{\infty h}$, associés respectivement aux géométries elliptique et sphéroïdale abordées dans ce travail. Plus précisément, nous détaillons, pour le groupe C_{2v} , les bases mathématiques de notre méthode qui consiste à décomposer les quantités physiques (contrainte, champ, déplacement) sur les représentations irréductibles du groupe dans le but de simplifier les problèmes étudiés. Le cas des fonctions scalaires [Fournier 1999] est repris en détails et est étendu au cas des fonctions vectorielles, dans le contexte de l'élastodynamique.

Nous présentons également le groupe $D_{\infty h}$ en vue d'une interprétation des résultats du chapitre 4. En effet, la levée de dégénérescence qui se produit au cours de la transition de la sphère vers le sphéroïde s'interprète en termes de brisure de symétrie $O(3) \rightarrow D_{\infty h}$.

Dans le chapitre 2, nous étudions théoriquement les modes résonants d'un cylindre elliptique élastique infini. Les résonances sont obtenues à partir du formalisme modal, en tenant compte des simplifications apportées par la théorie des groupes (Chapitre 1). Nous mettons ensuite en évidence la levée de dégénérescence, liée à la brisure de symétrie, en effectuant un suivi des résonances et en traçant le déplacement élastique associé aux modes résonants, à mesure que la section circulaire est déformée vers une section elliptique. Dans ce chapitre, nous présentons notre méthode, appliquée dans le contexte - vectoriel - de l'élastodynamique. En effet, la nature vectorielle des ondes transversales qui se propagent à l'intérieur du solide élastique est à prendre en compte.

Enfin, nous donnons une interprétation en termes de rayons à travers le lien connu entre le spectre des résonances et le spectre des longueurs des orbites périodiques. Nous calculons géométriquement la longueur de ces orbites périodiques, y compris lorsque le phénomène de conversion de mode se produit. Dans ce dernier cas, nous mettons en évidence un phénomène, nouveau à notre connaissance : l'existence de deux trajets extrémaux, l'un minimal et l'autre maximal, pour un type d'orbite donné. Cette observation est en accord avec le principe de Fermat.

Le chapitre 3 présente l'étude théorique et expérimentale de la diffusion acoustique par des cylindres elliptiques élastiques infinis. Nous traitons le problème à partir du formalisme modal combiné à la théorie des groupes, en suivant la même démarche qu'au chapitre 2. Nous complétons l'étude théorique par une étude expérimentale en spectroscopie ultrasonore. Nous menons une série d'expériences en cuve pour des cylindres elliptiques en aluminium immergés dans l'eau. Nous choisissons des cylindres de différentes excentricités afin de mettre en évidence la levée de dégénérescence liée à la brisure de symétrie. L'analyse spectrale des ondes ultrasonores par analyse de Fourier nous permet d'obtenir des spectres que l'on compare, après normalisation, aux résultats numériques obtenus à partir de notre modélisation théorique. Nous traçons également des diagrammes angulaires, correspondant à la répartition spatiale en champ lointain de l'amplitude des ondes ultrasonores diffusées par le cylindre. Nous observons alors expérimentalement la levée de dégénérescence.

Dans le chapitre 4, nous traitons le problème intérieur pour des sphéroïdes élastiques de formes oblate et prolata par une approche expérimentale de génération et de détection

optique d'ondes élastiques. Nous nous intéressons aux résonances de ces objets ainsi qu'à l'onde de Rayleigh qui se propage sur leur surface. Nous présentons le dispositif expérimental utilisé pour réaliser nos études dans les domaines temporel et fréquentiel. Des sphéroïdes en aluminium de différentes excentricités sont mis en vibration par impact laser et les mesures de vitesse et de fréquence sont effectuées par vibrométrie laser.

Dans le domaine temporel, nous nous intéressons à l'onde de Rayleigh en géométrie sphéroïdale. Les techniques expérimentales mises en oeuvre dans la présente étude ont été utilisées par d'autres auteurs pour analyser la propagation de l'onde de Rayleigh sur des sphères et des cylindres [Royer et al. 1988, Clorennec et Royer 2003; 2004, Royer et Clorennec 2008], avec des applications en contrôle non destructif [Clorennec et al. 2002, Clorennec 2002]. Dans notre cas, nous présentons différentes configurations expérimentales permettant de mettre en évidence l'existence de deux trajets parcourus par l'onde de Rayleigh : un trajet elliptique dans le plan méridien (contenant l'axe de symétrie du sphéroïde) et un trajet circulaire dans le plan équatorial (perpendiculaire à l'axe de symétrie du sphéroïde).

Dans le domaine fréquentiel, nous étudions les modes résonants à mesure que l'excentricité du sphéroïde augmente. Nous mettons alors en évidence la levée de dégénérescence liée à la brisure de la symétrie sphérique.

Enfin, nous nous intéressons aux spectres des longueurs des orbites périodiques. Nous identifions sans ambiguïté sur ces spectres les deux pics associés aux deux trajets parcourus par l'onde de Rayleigh. De plus, nous observons des pics associés à certaines orbites périodiques, avec et sans conversion de mode, qui coexistent dans les plans méridien et équatorial en géométrie sphéroïdale.

Dans une conclusion générale, nous récapitulons les différents résultats obtenus dans cette thèse et nous proposons également les perspectives qui peuvent être envisagées pour poursuivre cette étude.

THÉORIE DES GROUPES ET SYMÉTRIES

1

SOMMAIRE

1.1	RAPPELS SUR LA THÉORIE DES GROUPES	9
1.1.1	Groupes de symétrie	9
1.1.2	Représentations irréductibles et table des caractères d'un groupe	9
1.2	CONSIDÉRATIONS DE SYMÉTRIE	10
1.2.1	La géométrie elliptique et le groupe de symétrie C_{2v}	10
1.2.2	La géométrie sphéroïdale et le groupe de symétrie $D_{\infty h}$	15
	CONCLUSION DU CHAPITRE	17

Ce chapitre est consacré aux résultats mathématiques, en lien avec la notion de symétrie, qui seront utilisés dans les chapitres suivants.

En section 1.1, on rappelle quelques éléments de la théorie des groupes qui constitue le cadre mathématique rigoureux pour prendre en compte le rôle des symétries. En particulier, on donne la définition d'un groupe et plus particulièrement d'un groupe de symétrie. On précise également la notion de représentations irréductibles et de table des caractères de ce groupe. Les démonstrations des propriétés des structures mathématiques citées peuvent être trouvées dans la référence [Hamermesh 1989].

Dans la section 1.2, on s'intéresse aux propriétés de symétrie des objets que l'on va considérer dans les chapitres suivants. On étudie en sous-section 1.2.1 le groupe C_{2v} qui est le groupe de symétrie du disque elliptique (Chapitre 2) et du cylindre elliptique infini (Chapitre 3). La sous-section 1.2.2 est consacrée au groupe $D_{\infty h}$, le groupe de symétrie du sphéroïde. On étudie expérimentalement les modes résonants et les ondes de surface en géométrie sphéroïdale dans le chapitre 4. Bien que l'étude théorique ne soit pas abordée dans ce dernier chapitre, il est important de connaître ce groupe de symétrie car l'interprétation de la levée de dégénérescence des résonances y fait implicitement référence.

1.1 RAPPELS SUR LA THÉORIE DES GROUPES

Cette première section, d'ordre mathématique, expose brièvement les principales notions de la théorie des groupes de symétrie et de leurs représentations [Serre 1978, Naïmark et Stern 1982]. Elle n'est pas représentative du contenu ultérieur de la thèse, mais constitue néanmoins un préalable essentiel.

1.1.1 Groupes de symétrie

Un groupe est défini comme un couple $(G, *)$ où G est un ensemble et $*$ une opération possédant les propriétés suivantes :

- $\forall \alpha, \beta \in G, \gamma = \alpha * \beta \in G$ (loi de composition interne),
- $\forall \alpha, \beta, \gamma \in G, (\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$ (associativité),
- $\exists e$, élément neutre, tel que $\forall \beta \in G, \beta * e = e * \beta = \beta$,
- $\forall \beta \in G, \beta$ admet un symétrique $\gamma \in G$ tel que $\beta * \gamma = \gamma * \beta = e$.

La symétrie d'un corps est décrite en donnant l'ensemble de toutes les transformations qui le laissent invariant, c'est à dire qui préservent les distances entre toutes les paires de points du corps. De telles transformations s'appellent transformations de symétrie (ou isométries). L'ensemble des opérations qui laissent un objet invariant présente une structure de groupe : le groupe de symétrie (ou groupe isométrique) du corps. Les transformations qui préservent les distances peuvent toutes être construites à partir de deux types fondamentaux :

- la rotation d'un angle donné par rapport à un certain axe, et
- la réflexion miroir dans un plan.

1.1.2 Représentations irréductibles et table des caractères d'un groupe

S'il existe un homomorphisme d'un groupe de symétrie G dans un groupe d'opérateurs $D(G)$ agissant sur l'espace vectoriel V , on dit que le groupe d'opérateurs linéaires $D(G)$ est une représentation du groupe G . L'opérateur correspondant à l'élément R de G sera noté $D(R)$. Si R et S sont des éléments du groupe G , et E la transformation identité¹ alors,

$$D(RS) = D(R)D(S), \quad (1.1)$$

$$D(R^{-1}) = [D(R)]^{-1}, \quad (1.2)$$

$$D(E) = 1. \quad (1.3)$$

Si V est de dimension n , on dit que la représentation est n -dimensionnelle². Si on choisit une base de l'espace vectoriel V de dimension n , les opérateurs linéaires de la représentation peuvent être décrits par leurs matrices. On obtient alors une correspondance homomorphe du groupe G sur un groupe de matrice $n \times n$, c'est à dire une représentation matricielle de G . La somme des éléments diagonaux (la trace) d'une matrice $D(R)$ est appelée le caractère de R dans la représentation D et est notée

$$\chi(R) = \sum_{\ell} D_{\ell\ell}(R). \quad (1.4)$$

À une représentation donnée d'un groupe de symétrie est associée un ensemble de caractères. Les représentations équivalentes ont le même ensemble de caractères. En notant les classes de G par K_1, K_2, \dots, K_k , la représentation sera décrite par un ensemble de caractères

1. La transformation identité consiste à amener l'objet en coïncidence avec lui-même.
2. Dans le cas des groupes de symétrie continus, la dimension est infinie.

$\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$, où k est le nombre de classes de G . Il y a donc autant de classes que de caractères différents. Pour différencier les représentations non équivalentes, on utilise un exposant. Par exemple, $\chi_k^{(\mu)}$ est le caractère de la classe K_k dans une représentation $D^{(\mu)}$. Une représentation quelconque D peut s'exprimer en fonction de représentations plus simples

$$D = D^{(1)} + D^{(2)} + \dots, \quad (1.5)$$

où $D^{(1)}, D^{(2)} \dots$ sont des représentations dites irréductibles.

Pour un groupe donné G , on rassemble toutes ses caractéristiques (représentations, classes et caractères), dans un tableau de la forme

G	K_1	K_2	...
$D^{(1)}$	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$...
$D^{(2)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$...
...

appelé table des caractères du groupe.

1.2 CONSIDÉRATIONS DE SYMÉTRIE

1.2.1 La géométrie elliptique et le groupe de symétrie C_{2v}

On considère un cylindre elliptique infini d'axe Oz . Cet objet est invariant selon quatre transformations de symétrie (Fig 1.1) :

- (i) E , l'identité ($\theta \rightarrow \theta$),
- (ii) C_2 , la rotation d'angle π autour de l'axe Oz ($\theta \rightarrow \pi + \theta$),
- (iii) σ_x , la réflexion dans le plan Oxz ($\theta \rightarrow -\theta$),
- (iv) σ_y , la réflexion dans le plan Oyz ($\theta \rightarrow \pi - \theta$).

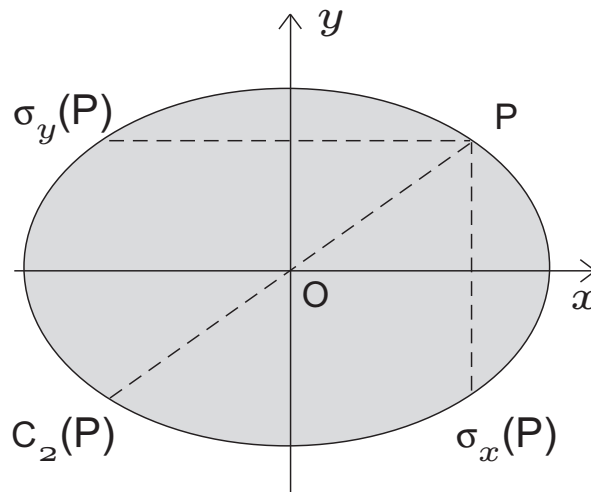


FIGURE 1.1 – Transformations de symétrie.

Ces quatre transformations de symétrie forment un groupe fini, appelé C_{2v} , qui est le groupe de symétrie de l'ellipse [Hamermesh 1989].

Quatre représentations irréductibles unidimensionnelles A_1, A_2, B_1, B_2 sont associées au groupe de symétrie C_{2v} . Dans une représentation donnée (A_1, A_2, B_1 ou B_2) les éléments du groupe E, C_2, σ_x et σ_y sont représentés par des matrices 1×1 données à la ligne correspondante de la table des caractères du groupe de symétrie C_{2v} (Tab. 1.1). On donne également

TABLE 1.1 – Table des caractères du groupe C_{2v} .

C_{2v}	E	C_2	σ_x	σ_y
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	-1	1

TABLE 1.2 – Table de multiplication pour une fonction appartenant à une représentation irréductible donnée.

\times	A_1	A_2	B_1	B_2
A_1	A_1	A_2	B_1	B_2
A_2	A_2	A_1	B_2	B_1
B_1	B_1	B_2	A_1	A_2
B_2	B_2	B_1	A_2	A_1

la table de multiplication pour une fonction appartenant à une représentation irréductible donnée (Tab. 1.2).

La transition du cylindre circulaire vers le cylindre elliptique correspond à la brisure de symétrie du groupe $O(2)$ (invariance sous toutes les rotations) vers le groupe C_{2v} . Dans notre étude, le cylindre elliptique infini se réduit à un disque elliptique décrit dans le système de coordonnées polaires (ρ, θ) (Fig. 1.2).

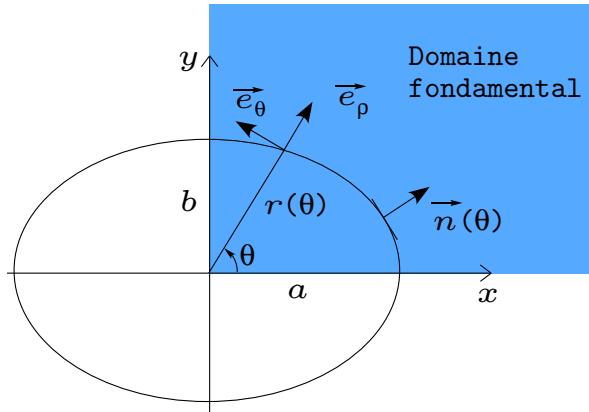


FIGURE 1.2 – Disque elliptique décrit dans le système de coordonnées polaires.

La frontière elliptique est délimitée par une courbe fermée décrite par $r(\theta)$ de normale $\mathbf{n}(\theta)$ orientée vers l'extérieur et définie par

$$\mathbf{n}(\theta) = n_\rho \mathbf{e}_\rho + n_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (1.6)$$

avec

$$n_\rho = \frac{1 - e^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{1 + e^2(e^2 - 2) \cos^2 \theta}}, \quad n_\theta = \frac{e^2}{2} \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{1 + e^2(e^2 - 2) \cos^2 \theta}}, \quad (1.7)$$

et

$$r(\theta) = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}} \quad (1.8)$$

où $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ définit l'excentricité e . D'autres éléments de géométrie elliptique sont donnés en annexe A.1.

On s'intéresse maintenant aux décompositions d'une fonction scalaire $f(\rho, \theta)$ et d'une fonction vectorielle $\mathbf{f}(\rho, \theta) = f_\rho \mathbf{e}_\rho + f_\theta \mathbf{e}_\theta$ sur les représentations irréductibles du groupe C_{2v} .

1.2.1.1 Décomposition d'une fonction scalaire sur les représentations irréductibles du groupe C_{2v}

L'action des transformations de symétrie sur une fonction scalaire $f(\rho, \theta)$ est donnée par

$$Ef(\rho, \theta) = f(\rho, \theta), \quad C_2f(\rho, \theta) = f(\rho, \pi + \theta), \quad \sigma_x f(\rho, \theta) = f(\rho, -\theta), \quad \sigma_y f(\rho, \theta) = f(\rho, \pi - \theta). \quad (1.9)$$

La table des caractères (Tab. 1.1) permet de décomposer cette fonction sur les 4 représentations irréductibles du groupe C_{2v}

$$f(\rho, \theta) = f^{A_1}(\rho, \theta) + f^{A_2}(\rho, \theta) + f^{B_1}(\rho, \theta) + f^{B_2}(\rho, \theta), \quad (1.10)$$

où $f^{A_1}, f^{A_2}, f^{B_1}$ et f^{B_2} satisfont à

$$Ef^{A_1} = f^{A_1}; \quad C_2f^{A_1} = f^{A_1}; \quad \sigma_x f^{A_1} = f^{A_1}; \quad \sigma_y f^{A_1} = f^{A_1}, \quad (1.11a)$$

$$Ef^{A_2} = f^{A_2}; \quad C_2f^{A_2} = f^{A_2}; \quad \sigma_x f^{A_2} = -f^{A_2}; \quad \sigma_y f^{A_2} = -f^{A_2}, \quad (1.11b)$$

$$Ef^{B_1} = f^{B_1}; \quad C_2f^{B_1} = -f^{B_1}; \quad \sigma_x f^{B_1} = f^{B_1}; \quad \sigma_y f^{B_1} = -f^{B_1}, \quad (1.11c)$$

$$Ef^{B_2} = f^{B_2}; \quad C_2f^{B_2} = -f^{B_2}; \quad \sigma_x f^{B_2} = -f^{B_2}; \quad \sigma_y f^{B_2} = f^{B_2}. \quad (1.11d)$$

On montre explicitement que

$$f^{A_1} = \frac{1}{4}(E + C_2 + \sigma_x + \sigma_y)f, \quad (1.12a)$$

$$f^{A_2} = \frac{1}{4}(E + C_2 - \sigma_x - \sigma_y)f, \quad (1.12b)$$

$$f^{B_1} = \frac{1}{4}(E - C_2 + \sigma_x - \sigma_y)f, \quad (1.12c)$$

$$f^{B_2} = \frac{1}{4}(E - C_2 - \sigma_x + \sigma_y)f. \quad (1.12d)$$

Dans le cas particulier où $f(\rho, \theta)$ est de la forme

$$f(\rho, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(\rho) e^{in\theta}, \quad (1.13)$$

on peut écrire

$$f^{A_1}(\rho, \theta) = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 + (-1)^n) (f_n(\rho) + f_{-n}(\rho)) e^{in\theta}, \quad (1.14a)$$

$$f^{A_2}(\rho, \theta) = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 + (-1)^n) (f_n(\rho) - f_{-n}(\rho)) e^{in\theta}, \quad (1.14b)$$

$$f^{B_1}(\rho, \theta) = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 - (-1)^n) (f_n(\rho) + f_{-n}(\rho)) e^{in\theta}, \quad (1.14c)$$

$$f^{B_2}(\rho, \theta) = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 - (-1)^n) (f_n(\rho) - f_{-n}(\rho)) e^{in\theta}. \quad (1.14d)$$

Applications aux solutions de l'équation d'Helmholtz en coordonnées polaires Les expressions (Eqs. 1.14) peuvent être simplifiées davantage dans le cas où $f_n(\rho)$ est de la forme $A_n J_n(\rho)$ ou $A_n H_n^{(1)}(\rho)$ en utilisant les propriétés de symétrie et de parité des fonctions de

Bessel. Les fonctions sont alors de la forme (le détail des calculs est donné dans l'annexe A.2) :

$$f^{A_1}(\rho, \theta) \propto \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n A_{2n} J_{2n}(\rho) \cos(2n\theta), \quad (1.15a)$$

$$f^{A_2}(\rho, \theta) \propto \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n A_{2n} J_{2n}(\rho) \sin(2n\theta), \quad (1.15b)$$

$$f^{B_1}(\rho, \theta) \propto \sum_{n=0}^{+\infty} A_{2n+1} J_{2n+1}(\rho) \cos((2n+1)\theta), \quad (1.15c)$$

$$f^{B_2}(\rho, \theta) \propto \sum_{n=0}^{+\infty} A_{2n+1} J_{2n+1}(\rho) \sin((2n+1)\theta), \quad (1.15d)$$

où γ_n est le facteur de Neumann défini par $\gamma_0 = 1$ et $\gamma_n = 2$ pour $n > 0$. Les coefficients inconnus sont bien évidemment différents dans chaque représentation. Par exemple, on note sans distinction A_{2n} à la fois pour A_1 et pour A_2 , bien que ces coefficients soient différents dans chacune des représentations. Dans la suite, des facteurs i , $2i$ ou i^n seront introduits pour faciliter l'écriture des conditions aux limites.

Pour simplifier les notations utilisées dans la suite, on introduit

$$\sum_{n \text{ pair}} f_n = \sum_{r=0}^{+\infty} f_{2r}, \quad \text{et} \quad \sum_{n \text{ impair}} f_n = \sum_{r=0}^{+\infty} f_{2r+1}. \quad (1.16)$$

1.2.1.2 Décomposition d'une fonction vectorielle sur les représentations irréductibles du groupe C_{2v}

Soit une fonction vectorielle $\mathbf{f}(\rho, \theta)$ exprimée dans le système de coordonnées polaires

$$\mathbf{f}(\rho, \theta) = f_\rho \mathbf{e}_\rho + f_\theta \mathbf{e}_\theta. \quad (1.17)$$

L'action des transformations de symétrie sur les vecteurs de base \mathbf{e}_ρ et \mathbf{e}_θ (Fig. 1.3) est donnée par

$$E(\mathbf{e}_\rho) = \mathbf{e}_\rho; \quad C_2(\mathbf{e}_\rho) = \mathbf{e}_\rho; \quad \sigma_x(\mathbf{e}_\rho) = \mathbf{e}_\rho; \quad \sigma_y(\mathbf{e}_\rho) = \mathbf{e}_\rho, \quad (1.18a)$$

$$E(\mathbf{e}_\theta) = \mathbf{e}_\theta; \quad C_2(\mathbf{e}_\theta) = \mathbf{e}_\theta; \quad \sigma_x(\mathbf{e}_\theta) = -\mathbf{e}_\theta; \quad \sigma_y(\mathbf{e}_\theta) = -\mathbf{e}_\theta. \quad (1.18b)$$

On en déduit que \mathbf{e}_ρ et \mathbf{e}_θ appartiennent respectivement aux représentations A_1 et A_2 .

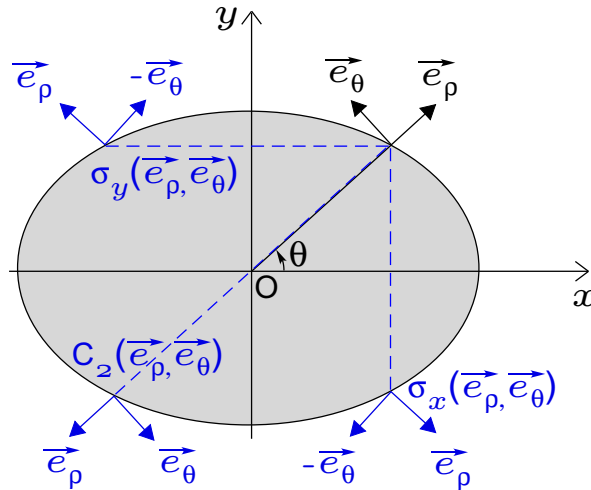


FIGURE 1.3 – Action des transformations de symétrie sur les vecteurs de base \mathbf{e}_ρ et \mathbf{e}_θ .

D'après la décomposition scalaire (Eq. 1.10), cette fonction vectorielle peut s'écrire

$$\mathbf{f}(\rho, \theta) = \left(f_\rho^{A_1} + f_\rho^{A_2} + f_\rho^{B_1} + f_\rho^{B_2} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(f_\theta^{A_1} + f_\theta^{A_2} + f_\theta^{B_1} + f_\theta^{B_2} \right) \mathbf{e}_\theta. \quad (1.19)$$

À ce stade, la décomposition sur les représentations concerne uniquement les composantes. On développe l'équation (1.19), en tenant compte du fait que $\mathbf{e}_\rho \in A_1$ et $\mathbf{e}_\theta \in A_2$, et en utilisant la table de multiplication (1.2). On a alors :

$$\mathbf{f}(\rho, \theta) = \underbrace{f_\rho^{A_1} \mathbf{e}_\rho}_{A_1 \times A_1 = A_1} + \underbrace{f_\rho^{A_2} \mathbf{e}_\rho}_{A_2 \times A_1 = A_2} + \underbrace{f_\rho^{B_1} \mathbf{e}_\rho}_{B_1 \times A_1 = B_1} + \underbrace{f_\rho^{B_2} \mathbf{e}_\rho}_{B_2 \times A_1 = B_2} + \underbrace{f_\theta^{A_1} \mathbf{e}_\theta}_{A_1 \times A_2 = A_2} + \underbrace{f_\theta^{A_2} \mathbf{e}_\theta}_{A_2 \times A_2 = A_1} + \underbrace{f_\theta^{B_1} \mathbf{e}_\theta}_{B_1 \times A_2 = B_2} + \underbrace{f_\theta^{B_2} \mathbf{e}_\theta}_{B_2 \times A_2 = B_1}. \quad (1.20)$$

On peut écrire $\mathbf{f}(\rho, \theta)$ comme une somme de fonctions vectorielles, chacune appartenant à une représentation irréductible de \mathcal{C}_{2v} , sous la forme

$$\mathbf{f}(\rho, \theta) = \mathbf{f}^{A_1}(\rho, \theta) + \mathbf{f}^{A_2}(\rho, \theta) + \mathbf{f}^{B_1}(\rho, \theta) + \mathbf{f}^{B_2}(\rho, \theta), \quad (1.21)$$

avec

$$\mathbf{f}^{A_1} = f_\rho^{A_1} \mathbf{e}_\rho + f_\theta^{A_2} \mathbf{e}_\theta, \quad (1.22a)$$

$$\mathbf{f}^{A_2} = f_\rho^{A_2} \mathbf{e}_\rho + f_\theta^{A_1} \mathbf{e}_\theta, \quad (1.22b)$$

$$\mathbf{f}^{B_1} = f_\rho^{B_1} \mathbf{e}_\rho + f_\theta^{B_2} \mathbf{e}_\theta, \quad (1.22c)$$

$$\mathbf{f}^{B_2} = f_\rho^{B_2} \mathbf{e}_\rho + f_\theta^{B_1} \mathbf{e}_\theta. \quad (1.22d)$$

On notera que les composantes scalaires d'une fonction vectorielle dans une représentation donnée n'appartiennent pas nécessairement à cette même représentation (Eqs. 1.22).

Les relations (1.22) peuvent être utilisées de deux façons :

- soit pour déterminer à quelles représentations appartiennent les composantes d'un vecteur, connaissant la représentation à laquelle ce vecteur appartient,
- soit pour déterminer à quelle représentation appartient un vecteur, connaissant les représentations auxquelles appartiennent ses composantes.

Exemple : la normale $\mathbf{n}(\theta)$ On rappelle que la normale $\mathbf{n}(\theta)$ est donnée par l'équation (1.6)

$$\mathbf{n}(\theta) = n_\rho \mathbf{e}_\rho + n_\theta \mathbf{e}_\theta,$$

avec n_ρ et n_θ définis par l'équation (1.7). En faisant agir les transformations de symétrie sur ces deux composantes, on constate que

$$E(n_\rho) = n_\rho; \quad C_2(n_\rho) = n_\rho; \quad \sigma_x(n_\rho) = n_\rho; \quad \sigma_y(n_\rho) = n_\rho, \quad (1.23)$$

$$E(n_\theta) = n_\theta; \quad C_2(n_\theta) = n_\theta; \quad \sigma_x(n_\theta) = -n_\theta; \quad \sigma_y(n_\theta) = -n_\theta. \quad (1.24)$$

Ainsi n_ρ est dans la représentation A_1 et n_θ est dans la représentation A_2 . Compte tenu de la décomposition vectorielle (Eq. 1.22a), on en déduit que $\mathbf{n}(\theta)$ est dans la représentation A_1 . D'autre part, pour des raisons évidentes de symétrie³, on déduit que $\mathbf{n}(\theta)$ est dans la représentation A_1 , et par suite, d'après l'équation (1.22a), $n_\rho \in A_1$ et $n_\theta \in A_2$. On retrouve ce résultat lorsqu'on applique les transformations de symétrie sur ces deux quantités scalaires.

3. Le vecteur $\mathbf{n}(\theta)$ est inchangé sous l'action des transformations du groupe de symétrie \mathcal{C}_{2v} .

1.2.1.3 Dérivée d'une fonction par rapport à la variable θ

L'écriture des conditions aux limites fait intervenir la dérivée des champs scalaires solutions de l'équation d'Helmholtz en coordonnées polaires. Il est alors intéressant de comprendre comment agit la dérivée sur une fonction écrite dans une représentation irréductible donnée. Les champs sont proportionnels à $\cos n\theta$ ou $\sin n\theta$ avec n pair ou impair.

On traite le cas de la fonction $\cos n\theta$ avec n pair. L'action des transformations sur cette fonction est donnée par

$$E(\cos n\theta) = \cos n\theta, \quad C_2(\cos n\theta) = \cos n\theta, \quad \sigma_x(\cos n\theta) = \cos n\theta, \quad \sigma_y(\cos n\theta) = -\cos n\theta. \quad (1.25)$$

D'après l'équation (1.11a), $\cos n\theta$ appartient à A_1 . La dérivée par rapport à θ est

$$\frac{\partial \cos n\theta}{\partial \theta} = -n \sin n\theta. \quad (1.26)$$

Appliquons maintenant les transformations de symétrie à $-n \sin n\theta$:

$$E(-n \sin n\theta) = -n \sin n\theta, \quad C_2(-n \sin n\theta) = -n \sin n\theta, \\ \sigma_x(-n \sin n\theta) = n \sin n\theta, \quad \sigma_y(-n \sin n\theta) = n \sin n\theta. \quad (1.27)$$

D'après l'équation (1.11b), $-n \sin n\theta$ appartient à A_2 . On a donc $\frac{\partial f^{A_1}}{\partial \theta} = g^{A_2}$. Or, d'après la table de multiplication (Tab. 1.2), $A_2 \times A_1 = A_2$. En procédant de la même façon pour les fonctions $\cos n\theta$ avec n impair et $\sin n\theta$ avec n pair ou impair, on en conclut que la dérivée par rapport à θ agit donc comme une multiplication par une fonction appartenant à A_2 .

1.2.1.4 Restriction au domaine fondamental

L'utilisation de la théorie des groupes permet de restreindre l'étude au domaine dit fondamental qui se réduit au quart du disque elliptique $\theta \in [0, \pi/2]$ (Fig. 1.2). Ceci constitue une simplification très importante, à la fois sur le plan théorique et sur le plan numérique. Bien évidemment, les grandeurs physiques calculées sur le domaine fondamental et appartenant à une représentation irréductible donnée peuvent facilement être déterminées sur le domaine complet par de simples considérations de symétrie.

1.2.2 La géométrie sphéroïdale et le groupe de symétrie $\mathcal{D}_{\infty h}$

On considère un sphéroïde d'axe Oz . Cet objet est invariant selon les transformations de symétrie suivantes :

- (i) E , classe contenant l'identité,
- (ii) $C(\varphi)$, classe contenant les rotations d'angle φ quelconque par rapport à l'axe Oz ,
- (iii) σ_v , classe contenant les réflexions miroir par rapport aux plans Oxz et Oyz ,
- (iv) I , classe contenant l'inversion (symétrie par rapport à O),
- (v) $IC(\varphi)$, classe contenant les réflexions miroir par rapport à tout plan contenant l'axe Oz ,
- (vi) $I\sigma_v$, classe contenant les rotations d'angle π par rapport aux axes Ox et Oy .

Ces transformations forment un groupe continu, appelé $\mathcal{D}_{\infty h}$, qui est le groupe de symétrie du sphéroïde. Ce groupe est constitué de 4 représentations irréductibles monodimensionnelles (notées A) et d'un nombre infini de représentations irréductibles bidimensionnelles (notées E). L'ensemble des caractéristiques de $\mathcal{D}_{\infty h}$ sont regroupées dans la table des caractères du groupe (Tab. 1.3) dans laquelle

TABLE 1.3 – Table des caractères du groupe $D_{\infty h}$ avec $\Lambda = |m| = 0, 1, 2, \dots + \infty$.

$D_{\infty h}$	E	$C(\varphi)$	σ_v	I	$IC(\varphi)$	$I\sigma_v$
$A_{1g}(\Lambda = 0)$	1	1	1	1	1	1
$A_{1u}(\Lambda = 0)$	1	1	1	-1	-1	-1
$A_{2g}(\Lambda = 0)$	1	1	-1	1	1	-1
$A_{2u}(\Lambda = 0)$	1	1	-1	-1	-1	1
$E_{1g}(\Lambda = 1)$	2	$2 \cos \varphi$	0	2	$2 \cos \varphi$	0
$E_{1u}(\Lambda = 1)$	2	$2 \cos \varphi$	0	-2	$-2 \cos \varphi$	0
$E_{2g}(\Lambda = 2)$	2	$2 \cos(2\varphi)$	0	2	$2 \cos(2\varphi)$	0
$E_{2u}(\Lambda = 2)$	2	$2 \cos(2\varphi)$	0	-2	$-2 \cos(2\varphi)$	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$E_{pg}(\Lambda = p)$	2	$2 \cos(p\varphi)$	0	2	$2 \cos(p\varphi)$	0
$E_{pu}(\Lambda = p)$	2	$2 \cos(p\varphi)$	0	-2	$-2 \cos(p\varphi)$	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

TABLE 1.4 – Caractères des classes E , $C(\varphi)$, I et $IC(\varphi)$ dans les représentations bidimensionnelles $E_{\Lambda g}$ et $E_{\Lambda u}$, avec $\Lambda = |m| = 0, 1, 2, \dots + \infty$.

	E	$C(\varphi)$	I	$IC(\varphi)$
$E_{\Lambda g}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\Lambda\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\Lambda\varphi} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\Lambda\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\Lambda\varphi} \end{pmatrix}$
$E_{\Lambda u}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{i\Lambda\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\Lambda\varphi} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -e^{i\Lambda\varphi} & 0 \\ 0 & -e^{-i\Lambda\varphi} \end{pmatrix}$

- les lettres A et E désignent respectivement les représentations monodimensionnelles et bidimensionnelles,
- l'indice 1 désigne, pour les représentations monodimensionnelles A , l'invariance par la rotation $C(\varphi)$ et la parité par rapport à la réflexion σ_v ,
- l'indice 2 désigne, pour les représentations monodimensionnelles A , l'invariance par la rotation $C(\varphi)$ et la non parité par rapport à la réflexion σ_v ,
- les indices g et u ⁴ désignent respectivement la parité et la non parité par rapport à l'inversion I .

Les caractères des classes E , $C(\varphi)$, I et $IC(\varphi)$ dans les représentations bidimensionnelles $E_{\Lambda g}$ et $E_{\Lambda u}$, avec $\Lambda = |m| = 0, 1, 2, \dots + \infty$, se décomposent en matrice 2×2 (Tab. 1.4). Les caractères de σ_v et $I\sigma_v$ sont nuls dans ces représentations.

Soit une fonction arbitraire $f(r, \theta, \phi)$, où (r, θ, ϕ) sont les coordonnées sphériques usuelles, telle que

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} a_{\ell m} f_{\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (1.28)$$

4. Notation allemande : gerade (pair), ungerade (impair).

où les $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ sont les harmoniques sphériques. Les éléments des classes $E, C(\varphi), \sigma_v, I, IC(\varphi)$ et $I\sigma_v$ du groupe $D_{\infty h}$ agissent sur $f(r, \theta, \phi)$ de la manière suivante :

$$Ef(r, \theta, \phi) = f(r, \theta, \phi), \quad (1.29a)$$

$$C(\varphi)f(r, \theta, \phi) = f(r, \theta, \phi + \varphi), \quad (1.29b)$$

$$\sigma_v f(r, \theta, \phi) = \begin{cases} f(r, \theta, \pi - \phi) & (\text{réflexion} / Oyz) \\ f(r, \theta, -\phi) & (\text{réflexion} / Oxz), \end{cases} \quad (1.29c)$$

$$If(r, \theta, \phi) = f(r, \pi - \theta, \pi + \phi), \quad (1.29d)$$

$$IC(\varphi)f(r, \theta, \phi) = f(r, \pi - \theta, \pi + \phi + \varphi), \quad (1.29e)$$

$$I\sigma_v f(r, \theta, \phi) = \begin{cases} f(r, \pi - \theta, -\phi) & (\text{rotation de } \pi / Ox) \\ f(r, \theta, \pi - \phi) & (\text{rotation de } \pi / Oy). \end{cases} \quad (1.29f)$$

CONCLUSION DU CHAPITRE

Nous avons présenté dans ce chapitre la théorie des groupes à travers la physique : qu'apporte-t-elle dans ce domaine ? En quoi les groupes interviennent-ils ? Les symétries jouent un rôle important en physique et le cadre mathématiques rigoureux pour les traiter est la théorie des groupes. Les géométries elliptique et sphéroïdale vont être étudiées dans la suite, c'est pourquoi nous nous sommes intéressés aux groupes de symétrie C_{2v} (disque elliptique, cylindre elliptique infini) et $D_{\infty h}$ (sphéroïde). L'utilisation des symétries permet un découplage du problème étudié sur les représentations irréductibles du groupe en décomposant les quantités physiques (scalaires ou vectorielles) sur ces représentations. Le contexte vectoriel de l'élastodynamique constitue la principale difficulté et ceci a nécessité de comprendre la décomposition de fonctions vectorielles sur les représentations. La méthode développée dans ce cadre entraîne une classification des résonances et une simplification du traitement numérique du problème. Dans les chapitres suivants, les différents résultats de ce chapitre seront utilisés.

MODES RÉSONANTS EN GÉOMÉTRIE ELLIPTIQUE

SOMMAIRE

2.1	MODES RÉSONANTS : GÉNÉRALITÉS	21
2.2	MODES RÉSONANTS D'UN DISQUE ELLIPTIQUE ÉLASTIQUE	21
2.2.1	Position du problème	21
2.2.2	Détermination des modes résonants : résolution du problème propre	22
2.2.3	Le déplacement élastique	27
2.3	RÉSULTATS NUMÉRIQUES	28
2.3.1	Considérations numériques	28
2.3.2	Modes résonants et interprétation physique	30
2.4	LES ORBITES PÉRIODIQUES	34
2.4.1	Généralités	34
2.4.2	Le calcul des longueurs des orbites périodiques	35
2.4.3	Spectres des longueurs des orbites périodiques	41
	CONCLUSION DU CHAPITRE	50

DANS ce chapitre, on présente l'étude théorique et numérique des modes résonants d'un disque élastique.

On rappelle en section 2.1 quelques généralités sur les modes résonants, en précisant le cas d'objets élastiques.

La section 2.2 est consacrée à l'étude théorique du problème à partir du formalisme modal. En prenant en compte le rôle des symétries, on utilise les considérations algébriques présentées dans le chapitre 1 pour écrire les quantités physiques telles que le déplacement élastique et la traction. La condition aux limites est alors exprimée dans chaque représentation irréductible du groupe de symétrie du disque elliptique C_{2v} , et l'on obtient un système d'équations infini pour chaque représentation. Le problème est alors découplé, ces systèmes sont tronqués puis résolus numériquement pour obtenir les résonances.

En section 2.3, on présente les résultats numériques. Les valeurs des résonances sont suivies à mesure que la déformation du disque circulaire vers le disque elliptique augmente et leur levée de dégénérescence est mise en évidence. Ce phénomène est également observé en traçant les déformées modales. Enfin, en section 2.4, on donne une interprétation en termes d'orbites périodiques à travers la dualité entre le spectre des résonances et le spectre des longueurs des orbites périodiques. L'identification des orbites, par le calcul de leur longueur,

est obtenue à partir d'une méthode géométrique, y compris dans le contexte plus général de la conversion de mode. Dans ce cas, deux trajets, l'un minimal et l'autre maximal, sont mis en évidence pour une orbite de même type¹ en accord avec le principe de Fermat (ou de la phase stationnaire).

1. Un type d'orbite est défini par le nombre et une même succession de segments sur une période. Chaque segment peut être de polarisation longitudinale ou transversale.

2.1 MODES RÉSONANTS : GÉNÉRALITÉS

On considère un cylindre de longueur infinie d'axe Oz et de surface $\partial\Omega$, décrit dans le système des coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) . Le milieu intérieur Ω_i est homogène, isotrope et élastique. Du point de vue de l'acoustique, ce milieu élastique est caractérisé par une vitesse de propagation longitudinale c_L et une vitesse de propagation transversale c_T . Dans le cas d'un régime harmonique, avec la convention d'une dépendance temporelle en $e^{-i\omega t}$ où ω est la fréquence angulaire, on peut omettre cette dépendance temporelle et se ramener à un problème qui ne dépend plus que de la variable d'espace \mathbf{x} . On introduit les nombres d'onde du milieu : $k_L = \frac{\omega}{c_L}$ et $k_T = \frac{\omega}{c_T}$. Les modes résonants sont les solutions du problème propre décrit par

- l'équation d'Helmholtz homogène dans Ω_i ,
- la condition aux limites sur $\partial\Omega$.

La condition sur le bord $\partial\Omega$ est dictée par la nature physique de l'objet considéré et du milieu de propagation. Dans le cas d'objets élastiques, caractérisés par les célérités des ondes longitudinales et transversales c_L et c_T , on doit faire appel à la mécanique des milieux continus : la condition aux limites dans ce cas est l'annulation de la traction sur le bord $\partial\Omega$.

Le problème est indépendant de la variable z et se réduit donc à un problème bidimensionnel décrit par les coordonnées polaires (ρ, θ) .

2.2 MODES RÉSONANTS D'UN DISQUE ELLIPTIQUE ÉLASTIQUE

2.2.1 Position du problème

On considère le disque elliptique élastique décrit en figure (2.1) et caractérisé par les vitesses c_L et c_T des ondes longitudinales et transversales respectivement. Les caractéristiques géométriques sont définies en sous-section 1.2.1 par les équations (1.6-1.8).

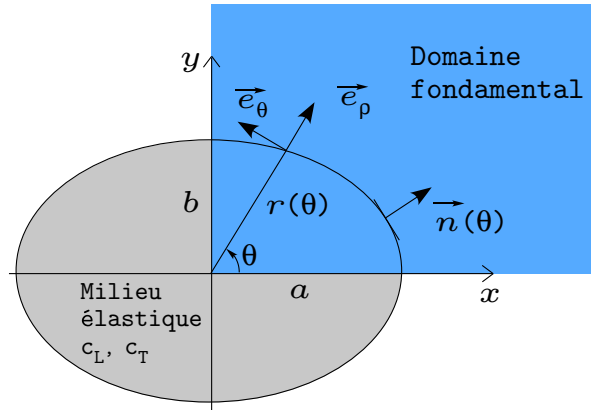


FIGURE 2.1 – Géométrie du problème.

Le déplacement élastique \mathbf{u} s'exprime à partir de la décomposition d'Helmholtz

$$\mathbf{u} = -\nabla\phi + \nabla \wedge \psi \quad (2.1)$$

où ϕ et $\psi = \psi \mathbf{e}_z$ sont les potentiels, scalaire et vectoriel, associés respectivement aux ondes longitudinales et transversales. Les potentiels scalaires ϕ et ψ satisfont les équations d'Helmholtz $\nabla^2\phi + k_L^2\phi = 0$ et $\nabla^2\psi + k_T^2\psi = 0$. Étant donné que les champs longitudinaux et transversaux dans le disque elliptique élastique ne possèdent pas de singularité au voisinage de

l'origine, ils s'expriment à l'aide des fonctions de Bessel $J_n(x)$

$$\phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^L J_n(k_L \rho) e^{in\theta}, \quad \psi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^T J_n(k_T \rho) e^{in\theta} \quad (2.2)$$

où A_n^j avec $j \in \{L, T\}$ sont les coefficients inconnus. À partir de la décomposition d'Helmholtz (Eq. 2.1), on obtient l'expression du déplacement élastique

$$\mathbf{u} = u_\rho \mathbf{e}_\rho + u_\theta \mathbf{e}_\theta = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\theta. \quad (2.3)$$

Considérations de symétrie et théorie des groupes D'après les résultats du chapitre 1, dans le cas de la géométrie elliptique (Sous-section 1.2.1), les quantités physiques, traction et déplacement, sont à décomposer sur les représentations irréductibles du groupe \mathcal{C}_{2v} . Plus particulièrement, en écrivant la condition aux limites dans chaque représentation, le problème est découpé : les résonances sont classées suivant les représentations. On rappelle également que l'étude est restreinte au domaine fondamental correspondant à un quart de l'ellipse (θ varie de 0 à $\pi/2$).

2.2.2 Détermination des modes résonants : résolution du problème propre

Les résonances sont déterminées en appliquant la condition aux limites

$$\mathbf{t} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n}(\theta) = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \rho = r(\theta), \quad (2.4)$$

i.e.

$$t_\rho \mathbf{e}_\rho + t_\theta \mathbf{e}_\theta = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

avec, d'après l'expression de la normale $\mathbf{n}(\theta) = n_\rho \mathbf{e}_\rho + n_\theta \mathbf{e}_\theta$ donnée par l'équation (1.6),

$$t_\rho = \sigma_{\rho\rho} n_\rho + \sigma_{\rho\theta} n_\theta, \quad (2.6a)$$

$$t_\theta = \sigma_{\rho\theta} n_\rho + \sigma_{\theta\theta} n_\theta. \quad (2.6b)$$

Les composantes du tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ dans le système de coordonnées polaires [Landau et Lifchitz 1990] sont obtenues avec la loi de Hooke², et en utilisant l'équation d'Helmholtz pour le potentiel ϕ

$$\sigma_{\rho\rho} = \lambda k_L^2 \phi - 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial \theta} \right), \quad (2.7a)$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \sigma_{\theta\rho} = \mu \left(-\frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right), \quad (2.7b)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda k_L^2 \phi + 2\mu \left(-\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right). \quad (2.7c)$$

La condition aux limites (Eq. 2.5) peut maintenant être exprimée séparément dans chaque représentation irréductible.

2. La loi de Hooke est donnée par $\sigma_{ij} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$ où λ et μ sont les coefficients de Lamé, \mathbf{u} le vecteur déplacement et ϵ_{ij} les composantes du tenseur des déformations linéarisé.

2.2.2.1 Représentation A_1

Pour exprimer la condition aux limites $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ dans la représentation irréductible A_1 , on utilise la décomposition vectorielle (Eq. 1.22a) qui impose que les composantes t_ρ et t_θ appartiennent respectivement à A_1 et A_2 , et que l'on note plus simplement $t_\rho^{A_1}$ et $t_\theta^{A_2}$. Alors,

$$t_\rho^{A_1} = \underbrace{\sigma_{\rho\rho}n_\rho}_{A_1} + \underbrace{\sigma_{\rho\theta}n_\theta}_{A_1} \quad \text{et} \quad t_\theta^{A_2} = \underbrace{\sigma_{\rho\theta}n_\rho}_{A_2} + \underbrace{\sigma_{\theta\theta}n_\theta}_{A_2}. \quad (2.8)$$

Or, comme démontré dans le chapitre 1 page 11, n_ρ et n_θ appartiennent respectivement aux représentations irréductibles A_1 et A_2 . D'après la table de multiplication (Tab. 1.2), les composantes $\sigma_{\rho\rho}$ et $\sigma_{\theta\theta}$ appartiennent à A_1 et $\sigma_{\rho\theta}$ appartient à A_2 . On a alors

$$\sigma_{\rho\rho}^{A_1} = \underbrace{\lambda k_L^2 \phi}_{A_1} - 2\mu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2}}_{A_1} + \underbrace{\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}}_{A_1} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial \theta}}_{A_1} \right), \quad (2.9a)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{A_2} = \sigma_{\theta\rho}^{A_2} = \mu \left(\underbrace{-\frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial \rho}}_{A_2} + \underbrace{\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}}_{A_2} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}}_{A_2} - \underbrace{\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2}}_{A_2} + \underbrace{\frac{2}{\rho^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}}_{A_2} \right), \quad (2.9b)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{A_1} = \underbrace{\lambda k_L^2 \phi}_{A_1} + 2\mu \left(\underbrace{-\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}}_{A_1} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \rho}}_{A_1} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho}}_{A_1} + \underbrace{\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}}_{A_1} \right). \quad (2.9c)$$

On rappelle (Chapitre 1 page 15) que la dérivée par rapport à θ agit comme une multiplication par une fonction appartenant à A_2 . D'après la table de multiplication (Tab. 1.2), et en considérant les différents termes dans les équations (2.9), on en déduit que ϕ doit appartenir à A_1 et ψ doit appartenir à A_2 . Ces quantités sont de la forme (Eqs. 1.15a et 1.15b)

$$\phi^{A_1}(\rho, \theta) = \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n A_n^L J_n(k_L \rho) \cos n\theta, \quad \psi^{A_2}(\rho, \theta) = \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n A_n^T J_n(k_T \rho) \sin n\theta, \quad (2.10)$$

où γ_n est le facteur de Neumann défini par $\gamma_0 = 1$ et $\gamma_n = 2$ pour $n > 0$. En insérant les champs scalaires (Eqs. 2.10) dans la condition aux limites

$$\sigma_{\rho\rho}^{A_1} n_\rho + \sigma_{\rho\theta}^{A_2} n_\theta = 0 \quad (2.11a)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{A_2} n_\rho + \sigma_{\theta\theta}^{A_1} n_\theta = 0, \quad (2.11b)$$

on obtient

$$\sum_{n \text{ pair}} \gamma_n \left[A_n^L \left(c_n^L n_\rho \cos n\theta + d_n^L n_\theta \sin n\theta \right) + A_n^T \left(c_n^T n_\rho \cos n\theta + d_n^T n_\theta \sin n\theta \right) \right] = 0 \quad (2.12a)$$

$$\sum_{n \text{ pair}} \gamma_n \left[A_n^L \left(d_n^L n_\rho \sin n\theta - f_n^L n_\theta \cos n\theta \right) + A_n^T \left(d_n^T n_\rho \sin n\theta - f_n^T n_\theta \cos n\theta \right) \right] = 0 \quad (2.12b)$$

où les fonctions de structure $c_n^j, d_n^j, f_n^j, j \in \{L, T\}$ sont données dans l'annexe A.3. Ces fonctions dépendent de la variable θ et s'expriment à partir des fonctions de Bessel et de leurs dérivées. Pour s'affranchir de la dépendance angulaire, les fonctions $F_n(\theta)$ entre parenthèses dans les équations (2.12) sont développées en séries de Fourier de la façon suivante :

$$F_n(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_{n,p} e^{ip\theta}, \quad \text{avec} \quad f_{n,p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\theta) e^{-ip\theta} d\theta. \quad (2.13)$$

Le système d'équations (2.12) s'écrit alors

$$\sum_{n \text{ pair}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \gamma_n \left(A_n^L \beta_{n,p}^L + A_n^T \beta_{n,p}^T \right) e^{ip\theta} = 0 \quad (2.14a)$$

$$\sum_{n \text{ pair}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \gamma_n \left(A_n^L \xi_{n,p}^L + A_n^T \xi_{n,p}^T \right) e^{ip\theta} = 0 \quad (2.14b)$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \left(c_n^L n_\rho \cos n\theta + d_n^L n_\theta \sin n\theta \right) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_{n,p}^L e^{ip\theta}, \\ \text{avec } \beta_{n,p}^L &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(c_n^L n_\rho \cos n\theta + d_n^L n_\theta \sin n\theta \right) e^{-ip\theta} d\theta, \end{aligned} \quad (2.15a)$$

$$\begin{aligned} \left(c_n^T n_\rho \cos n\theta + d_n^T n_\theta \sin n\theta \right) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_{n,p}^T e^{ip\theta}, \\ \text{avec } \beta_{n,p}^T &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(c_n^T n_\rho \cos n\theta + d_n^T n_\theta \sin n\theta \right) e^{-ip\theta} d\theta, \end{aligned} \quad (2.15b)$$

$$\begin{aligned} \left(d_n^L n_\rho \sin n\theta - f_n^L n_\theta \cos n\theta \right) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \xi_{n,p}^L e^{ip\theta}, \\ \text{avec } \xi_{n,p}^L &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(d_n^L n_\rho \sin n\theta - f_n^L n_\theta \cos n\theta \right) e^{-ip\theta} d\theta, \end{aligned} \quad (2.15c)$$

$$\begin{aligned} \left(d_n^T n_\rho \sin n\theta - f_n^T n_\theta \cos n\theta \right) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \xi_{n,p}^T e^{ip\theta}, \\ \text{avec } \xi_{n,p}^T &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(d_n^T n_\rho \sin n\theta - f_n^T n_\theta \cos n\theta \right) e^{-ip\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (2.15d)$$

L'utilisation de la théorie des groupes confère des propriétés de parité aux fonctions entre parenthèses dans les équations (2.12) ou (2.15). En suivant la démarche décrite dans l'annexe A.4 qui utilise les propriétés de parité et d'invariance de ces fonctions, on peut réduire

- la somme sur p de $]-\infty, +\infty[$ à $[0, +\infty[$,
- le domaine d'intégration $[-\pi, \pi]$ à $[0, \pi/2]$, *i.e.* l'étude est restreinte au domaine fondamental (Fig. 2.1).

Les équations (2.15) correspondent à l'équation (A.16) avec :

$$F_n(\theta) \stackrel{(2.15a)}{=} \left(c_n^L n_\rho \cos n\theta + d_n^L n_\theta \sin n\theta \right) \text{ paire et invariante par changement } \theta \rightarrow \pi - \theta, \quad (2.16a)$$

$$F_n(\theta) \stackrel{(2.15b)}{=} \left(c_n^T n_\rho \cos n\theta + d_n^T n_\theta \sin n\theta \right) \text{ paire et invariante par changement } \theta \rightarrow \pi - \theta, \quad (2.16b)$$

$$F_n(\theta) \stackrel{(2.15c)}{=} \left(d_n^L n_\rho \sin n\theta - f_n^L n_\theta \cos n\theta \right) \text{ impaire et non invariante par changement } \theta \rightarrow \pi - \theta, \quad (2.16c)$$

$$F_n(\theta) \stackrel{(2.15d)}{=} \left(d_n^T n_\rho \sin n\theta - f_n^T n_\theta \cos n\theta \right) \text{ impaire et non invariante par changement } \theta \rightarrow \pi - \theta. \quad (2.16d)$$

On applique le résultat (Eq. A.22) dans les cas (Eqs. 2.16a et 2.16b) et le résultat (Eq. A.28) dans les cas (Eqs. 2.16c et 2.16d). On obtient alors les équations finales

$$\sum_{n \text{ pair}} \sum_{p \text{ pair}} \gamma_n \gamma_p \left(A_n^L \beta_{n,p}^L + A_n^T \beta_{n,p}^T \right) \cos p\theta = 0 \quad (2.17a)$$

$$\sum_{n \text{ pair}} \sum_{p \text{ pair}} \gamma_n \left(A_n^L \tilde{\zeta}_{n,p}^L + A_n^T \tilde{\zeta}_{n,p}^T \right) \sin p\theta = 0 \quad (2.17b)$$

où les coefficients de Fourier $\beta_{n,p}^j, \tilde{\zeta}_{n,p}^j, j \in \{L, T\}$ sont donnés dans l'annexe A.5. On note que l'utilisation de la théorie des groupes permet de réduire les sommes aux entiers pairs positifs.

On procède d'une manière similaire pour obtenir, *mutatis mutandis*, les équations finales pour les représentations irréductibles A_2, B_1 et B_2 .

2.2.2.2 Représentation A_2

Pour exprimer la condition aux limites $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ dans la représentation irréductible A_2 , on utilise la décomposition vectorielle (Eq. 1.22b) qui impose $t_\rho^{A_2}$ et $t_\theta^{A_1}$. On en déduit que la condition aux limites dans A_2 s'écrit

$$\sigma_{\rho\rho}^{A_2} n_\rho + \sigma_{\rho\theta}^{A_1} n_\theta = 0 \quad (2.18a)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{A_1} n_\rho + \sigma_{\theta\theta}^{A_2} n_\theta = 0, \quad (2.18b)$$

avec ϕ qui doit appartenir à A_2 et ψ à A_1 , de la forme (Eqs. 1.15b et 1.15a)

$$\phi^{A_2}(\rho, \theta) = \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n A_n^L J_n(k_L \rho) \sin n\theta, \quad \psi^{A_1}(\rho, \theta) = \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n A_n^T J_n(k_T \rho) \cos n\theta. \quad (2.19)$$

On obtient alors

$$\sum_{n \text{ pair}} \gamma_n \left[A_n^L \left(c_n^L n_\rho \sin n\theta - d_n^L n_\theta \cos n\theta \right) + A_n^T \left(-c_n^T n_\rho \sin n\theta + d_n^T n_\theta \cos n\theta \right) \right] = 0 \quad (2.20a)$$

$$\sum_{n \text{ pair}} \gamma_n \left[A_n^L \left(-d_n^L n_\rho \cos n\theta - f_n^L n_\theta \sin n\theta \right) + A_n^T \left(d_n^T n_\rho \cos n\theta + f_n^T n_\theta \sin n\theta \right) \right] = 0 \quad (2.20b)$$

où les fonctions de structure $c_n^j, d_n^j, f_n^j, j \in \{L, T\}$ sont données dans l'annexe A.3. La décomposition en série de Fourier, la réduction de la somme sur p et la restriction au domaine fondamental (Annexe A.4, résultats (Eqs. A.28 et A.22)) dans le système d'équations (2.20) conduisent aux équations finales

$$\sum_{n \text{ pair}} \sum_{p \text{ pair}} \gamma_n \left(A_n^L \alpha_{n,p}^L + A_n^T \alpha_{n,p}^T \right) \sin p\theta = 0 \quad (2.21a)$$

$$\sum_{n \text{ pair}} \sum_{p \text{ pair}} \gamma_n \gamma_p \left(A_n^L \eta_{n,p}^L + A_n^T \eta_{n,p}^T \right) \cos p\theta = 0 \quad (2.21b)$$

où les coefficients de Fourier $\alpha_{n,p}^j, \eta_{n,p}^j, j \in \{L, T\}$ sont donnés dans l'annexe A.5.

2.2.2.3 Représentation B_1

Pour exprimer la condition aux limites $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ dans la représentation irréductible B_1 , on utilise la décomposition vectorielle (Eq. 1.22c) qui impose $t_\rho^{B_1}$ et $t_\theta^{B_2}$. On en déduit que la condition aux limites dans B_1 s'écrit

$$\sigma_{\rho\rho}^{B_1} n_\rho + \sigma_{\rho\theta}^{B_2} n_\theta = 0 \quad (2.22a)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{B_2} n_\rho + \sigma_{\theta\theta}^{B_1} n_\theta = 0, \quad (2.22b)$$

avec ϕ qui doit appartenir à B_1 et ψ à B_2 , de la forme (Eqs. 1.15c et 1.15d)

$$\phi^{B_1}(\rho, \theta) = \sum_{n \text{ impair}} A_n^L J_n(k_L \rho) \cos n\theta, \quad \psi^{B_2}(\rho, \theta) = \sum_{n \text{ impair}} A_n^T J_n(k_T \rho) \sin n\theta. \quad (2.23)$$

On obtient alors

$$\sum_{n \text{ impair}} \left[A_n^L \left(c_n^L n_\rho \cos n\theta + d_n^L n_\theta \sin n\theta \right) + A_n^T \left(c_n^T n_\rho \cos n\theta + d_n^T n_\theta \sin n\theta \right) \right] = 0 \quad (2.24a)$$

$$\sum_{n \text{ impair}} \left[A_n^L \left(d_n^L n_\rho \sin n\theta - f_n^L n_\theta \cos n\theta \right) + A_n^T \left(d_n^T n_\rho \sin n\theta - f_n^T n_\theta \cos n\theta \right) \right] = 0 \quad (2.24b)$$

où les fonctions de structure $c_n^j, d_n^j, f_n^j, j \in \{L, T\}$ sont données dans l'annexe A.3. La décomposition en série de Fourier, la réduction de la somme sur p et la restriction au domaine fondamental (Annexe A.4, résultats (Eqs. A.24 et A.27)) dans le système d'équations (2.24) conduisent aux équations finales

$$\sum_{n \text{ impair}} \sum_{p \text{ impair}} \left(A_n^L \beta_{n,p}^L + A_n^T \beta_{n,p}^T \right) \cos p\theta = 0 \quad (2.25a)$$

$$\sum_{n \text{ impair}} \sum_{p \text{ impair}} \left(A_n^L \tilde{\zeta}_{n,p}^L + A_n^T \tilde{\zeta}_{n,p}^T \right) \sin p\theta = 0 \quad (2.25b)$$

où les coefficients de Fourier $\beta_{n,p}^j, \tilde{\zeta}_{n,p}^j, j \in \{L, T\}$ sont donnés dans l'annexe A.5.

2.2.2.4 Représentation B_2

Pour exprimer la condition aux limites $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ dans la représentation irréductible B_2 , on utilise la décomposition vectorielle (Eq. 1.22d) qui impose $t_\rho^{B_2}$ et $t_\theta^{B_1}$. On en déduit que la condition aux limites dans B_2 s'écrit

$$\sigma_{\rho\rho}^{B_2} n_\rho + \sigma_{\rho\theta}^{B_1} n_\theta = 0 \quad (2.26a)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{B_1} n_\rho + \sigma_{\theta\theta}^{B_2} n_\theta = 0, \quad (2.26b)$$

avec ϕ qui doit appartenir à B_2 et ψ à B_1 , de la forme (Eqs. 1.15d et 1.15c)

$$\phi^{B_2}(\rho, \theta) = \sum_{n \text{ impair}} A_n^L J_n(k_L \rho) \sin n\theta, \quad \psi^{B_1}(\rho, \theta) = \sum_{n \text{ impair}} A_n^T J_n(k_T \rho) \cos n\theta. \quad (2.27)$$

On obtient alors

$$\sum_{n \text{ impair}} \left[A_n^L \left(c_n^L n_\rho \sin n\theta - d_n^L n_\theta \cos n\theta \right) + A_n^T \left(-c_n^T n_\rho \sin n\theta + d_n^T n_\theta \cos n\theta \right) \right] = 0 \quad (2.28a)$$

$$\sum_{n \text{ impair}} \left[A_n^L \left(-d_n^L n_\rho \cos n\theta - f_n^L n_\theta \sin n\theta \right) + A_n^T \left(d_n^T n_\rho \cos n\theta + f_n^T n_\theta \sin n\theta \right) \right] = 0 \quad (2.28b)$$

où les fonctions de structure $c_n^j, d_n^j, f_n^j, j \in \{L, T\}$ sont données dans l'annexe A.3. La décomposition en série de Fourier, la réduction de la somme sur p et la restriction au domaine fondamental (Annexe A.4, résultats (Eqs. A.27 et A.24)) dans le système d'équations (2.28) conduisent aux équations finales

$$\sum_{n \text{ impair}} \sum_{p \text{ impair}} \left(A_n^L \alpha_{n,p}^L + A_n^T \alpha_{n,p}^T \right) \sin p\theta = 0 \quad (2.29a)$$

$$\sum_{n \text{ impair}} \sum_{p \text{ impair}} \left(A_n^L \eta_{n,p}^L + A_n^T \eta_{n,p}^T \right) \cos p\theta = 0 \quad (2.29b)$$

où les coefficients de Fourier $\alpha_{n,p}^j, \eta_{n,p}^j, j \in \{L, T\}$ sont donnés dans l'annexe A.5.

2.2.2.5 Ecriture matricielle

Les systèmes d'équations (2.17), (2.21), (2.25) et (2.29) peuvent s'exprimer sous forme matricielle pour chaque représentation $R_i = \{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ en définissant une matrice par blocs

$$M^{R_i} = \begin{pmatrix} P^{R_i L} & P^{R_i T} \\ Q^{R_i L} & Q^{R_i T} \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

où $(P, Q) \in \{(\beta_{n,p}^j, \zeta_{n,p}^j), (\alpha_{q,r}^j, \eta_{n,p}^j)\}$ sont les coefficients de Fourier définis dans l'annexe A.5. Les résonances sont alors calculées en résolvant l'équation caractéristique

$$\det M^{R_i} = 0. \quad (2.31)$$

Le découplage du problème sur les 4 représentations irréductibles de C_{2v} conduit à une classification des résonances.

2.2.3 Le déplacement élastique

Le déplacement élastique (Eq. 2.3) peut être exprimé dans chaque représentation R_i en utilisant les décompositions vectorielles (Eqs. 1.22) et les potentiels (Eqs. 2.10, 2.19, 2.23 et 2.27). Les déformées modales sont obtenues en calculant $|\mathbf{u}^{R_i}|$ (Paragraphe 2.3.2.2).

2.2.3.1 Représentation A_1

On exprime le déplacement élastique dans A_1 en utilisant la décomposition vectorielle (Eq. 1.22a)

$$\mathbf{u}^{A_1} = u_\rho^{A_1} \mathbf{e}_\rho + u_\theta^{A_2} \mathbf{e}_\theta = \underbrace{\left(-\frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)}_{A_1} \mathbf{e}_\rho + \underbrace{\left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)}_{A_2} \mathbf{e}_\theta. \quad (2.32)$$

La dérivée par rapport à θ agissant comme une multiplication par rapport à A_2 , d'après la table de multiplication (Tab. 1.2), ϕ doit appartenir à A_1 et ψ à A_2 . On insère les expressions des potentiels (Eqs. 2.10) dans l'équation (2.32) et on obtient

$$u_\rho^{A_1} = \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n \left(-k_L A_n^L J_n'(k_L \rho) + \frac{n}{\rho} A_n^T J_n(k_T \rho) \right) \cos(n\theta), \quad (2.33a)$$

$$u_\theta^{A_2} = \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n \left(-k_T A_n^T J_n'(k_T \rho) + \frac{n}{\rho} A_n^L J_n(k_L \rho) \right) \sin(n\theta). \quad (2.33b)$$

2.2.3.2 Représentation A_2

De la même façon, on exprime le déplacement élastique dans A_2 en utilisant la décomposition vectorielle (Eq. 1.22b) avec les expressions des potentiels ϕ^{A_2} et ψ^{A_1} données par les équations (2.19)

$$\mathbf{u}^{A_2} = u_\rho^{A_2} \mathbf{e}_\rho + u_\theta^{A_1} \mathbf{e}_\theta, \quad (2.34)$$

avec

$$u_\rho^{A_2} = \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n \left(-k_L A_n^L J_n'(k_L \rho) - \frac{n}{\rho} A_n^T J_n(k_T \rho) \right) \sin n\theta, \quad (2.35a)$$

$$u_\theta^{A_1} = \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n \left(-k_T A_n^T J_n'(k_T \rho) - \frac{n}{\rho} A_n^L J_n(k_L \rho) \right) \cos n\theta. \quad (2.35b)$$

2.2.3.3 Représentation B_1

On exprime le déplacement élastique dans B_1 en utilisant la décomposition vectorielle (Eq. 1.22c) avec les expressions des potentiels ϕ^{B_1} et ψ^{B_2} données par les équations (2.23)

$$\mathbf{u}^{B_1} = u_\rho^{B_1} \mathbf{e}_\rho + u_\theta^{B_2} \mathbf{e}_\theta, \quad (2.36)$$

avec

$$u_\rho^{B_1} = \sum_{n \text{ impair}} \left(-k_L A_n^L J_n'(k_L \rho) + \frac{n}{\rho} A_n^T J_n(k_T \rho) \right) \cos n\theta, \quad (2.37a)$$

$$u_\theta^{B_2} = \sum_{n \text{ impair}} \left(-k_T A_n^T J_n'(k_T \rho) + \frac{n}{\rho} A_n^L J_n(k_L \rho) \right) \sin n\theta. \quad (2.37b)$$

2.2.3.4 Représentation B_2

On exprime le déplacement élastique dans B_2 en utilisant la décomposition vectorielle (Eq. 1.22d) avec les expressions des potentiels ϕ^{B_2} et ψ^{B_1} données par les équations (2.27)

$$\mathbf{u}^{B_2} = u_\rho^{B_2} \mathbf{e}_\rho + u_\theta^{B_1} \mathbf{e}_\theta, \quad (2.38)$$

avec

$$u_\rho^{B_2} = \sum_{n \text{ impair}} \left(-k_L A_n^L J_n'(k_L \rho) - \frac{n}{\rho} A_n^T J_n(k_T \rho) \right) \sin n\theta, \quad (2.39a)$$

$$u_\theta^{B_1} = \sum_{n \text{ impair}} \left(-k_T A_n^T J_n'(k_T \rho) - \frac{n}{\rho} A_n^L J_n(k_L \rho) \right) \cos n\theta. \quad (2.39b)$$

2.3 RÉSULTATS NUMÉRIQUES

2.3.1 Considérations numériques

L'utilisation de la théorie des groupes a l'avantage de conduire à des équations découplées qui peuvent être résolues séparément pour chaque représentation irréductible. Les résonances sont déterminées en résolvant l'équation caractéristique $\det M^{R_i} = 0$ avec M^{R_i} donnée par l'expression matricielle (Eq. 2.30), $R_i \in \{A_1, A_2, B_1, B_2\}$. On peut rechercher les racines de cette équation à partir de deux méthodes :

- l’annulation du déterminant,
- le principe de l’argument [Whittaker et Watson 1927] qui consiste à rechercher les résonances par intégration dans le plan complexe de la variable kr .

Dans le cas du problème propre, les résonances obtenues sont réelles et on choisit plutôt la première méthode. Dans le cas du problème de diffusion (Chapitre 3), les résonances sont complexes et il est nécessaire d’utiliser la seconde méthode (détaillée dans le chapitre 3) dans ce cas.

Les résonances obtenues sont des nombres d’onde réduits calculés pour une ellipse ayant un rayon moyen égal à 1 (Annexe A.1). Ces nombres d’ondes sont également normalisés en définissant les indices de réfraction $n_L = c_{\text{eau}}/c_L$ et $n_T = c_{\text{eau}}/c_T$, avec $c_{\text{eau}} = 1480 \text{ m.s}^{-1}$ la célérité du son dans l’eau. Bien que pour le problème intérieur en élastodynamique l’introduction de la célérité des ondes dans l’eau n’ait pas de sens physique, on choisit cette normalisation pour faciliter la comparaison avec les valeurs des résonances dans le problème de diffusion où la même normalisation est choisie. Il s’agit d’avoir les mêmes ordres de grandeur entre les deux problèmes.

Les matrices par blocs apparaissant dans l’équation (2.30) étant de dimension infinie, elles doivent être tronquées si on veut obtenir une solution numérique. L’ordre de troncature N a été choisi à partir des discussions de Young et Bertrand [Young et Bertrand 1975] et de Nussenzweig [Nussenzweig 1992]. Il dépend du produit $k \times a$ (où k est le nombre d’onde réduit normalisé et a le demi-grand axe du disque elliptique). Cet ordre de troncature N est obtenu numériquement à partir de la procédure suivante.

Les résonances sont déterminées pour les valeurs croissantes de k . Pour les faibles valeurs de k , l’ordre N est choisi de façon à assurer la convergence de la solution, la valeur retenue est $N_{\min} = 8$. Ensuite, à mesure que k augmente, le remplissage des blocs matriciels s’effectue jusqu’à l’obtention d’une valeur stable de la résonance en fixant la précision souhaitée sur le nombre de décimales (par exemple $\epsilon = 10^{-4}$). Pour cela, on considère les valeurs normées des éléments de matrice M_{ij} avec la condition

$$\frac{|M_{ij}|}{\|M\|_2} > \epsilon, \quad (2.40)$$

où $\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^N |M_{ij}|^2}$ est la norme matricielle choisie. On obtient ainsi des valeurs numériques $N(ka)$ qui évoluent de façon quasi linéaire dans le domaine d’étude (k variant de 0 à 300). On réalise donc une interpolation linéaire³ à partir d’un polynôme du premier degré sur l’ensemble du domaine fréquentiel k pour obtenir une expression analytique générale pour l’ordre de troncature

$$N = \text{Sup} \left(8, \frac{ka}{4} + 4 \right). \quad (2.41)$$

L’implémentation numérique de notre méthode, qui utilise la théorie des groupes, offre de nombreux avantages. Elle améliore en particulier le conditionnement des matrices et accélère la vitesse de calcul (taille des matrices réduites et intégration numérique restreinte au seul domaine fondamental). Les matrices considérées sont de dimensions $(N \times N)$ au lieu de $(2N \times 2N)$ pour le problème traité sans la théorie des groupes. La recherche des résonances est beaucoup plus efficace étant donné que, pour un domaine fréquentiel donné, leur nombre est réduit d’un facteur 4. L’isolation et l’identification des résonances sont grandement facilitées, notamment en haute fréquence où les valeurs de résonance deviennent extrêmement proches du fait de leur prolifération. Les calculs peuvent ainsi être menés pour

3. On note que, bien que l’évolution ne soit pas rigoureusement linéaire, l’interpolation par un polynôme du second degré n’apporte aucune précision supplémentaire, le terme correctif étant négligeable.

des valeurs de nombre d'onde jusqu'à $k = 300$. Ce domaine de fréquence serait très certainement inaccessible à partir d'un formalisme plus classique ne faisant pas appel à la théorie des groupes. De plus, la résolution numérique du problème pour de fortes excentricités, lorsque le rayon de courbure varie rapidement, est possible grâce à notre méthode.

2.3.2 Modes résonants et interprétation physique : mise en évidence de la levée de dégénérescence

2.3.2.1 Tracé et suivi des résonances

Sur la figure (2.2), on trace les résonances (k -résonants) associés aux 15 premiers modes du disque circulaire, repérés par (n, ℓ) dans le formalisme modal, lorsque celui-ci est déformé vers le disque elliptique en conservant le rayon moyen constant. Le matériau choisi est l'aluminium ($c_L = 6344,8 \text{ m.s}^{-1}$, $c_T = 3196 \text{ m.s}^{-1}$). Le cercle ($b/a = 1$) et les ellipses ($b/a = 0,9051 - 0,7616 - 0,5370$) représentés dans la figure (2.2) permettent de visualiser la déformation. Les résonances étant classées selon les 4 représentations irréductibles A_1, A_2, B_1 et B_2 du groupe C_{2v} , elles sont *étiquetées* par le nom de la représentation. Elles sont suivies⁴ à mesure que l'excentricité augmente ou, de façon équivalente, que le rapport b/a diminue. Les valeurs des résonances étant extrêmement rapprochées, le suivi ne serait pas possible sans la classification apportée par notre méthode.

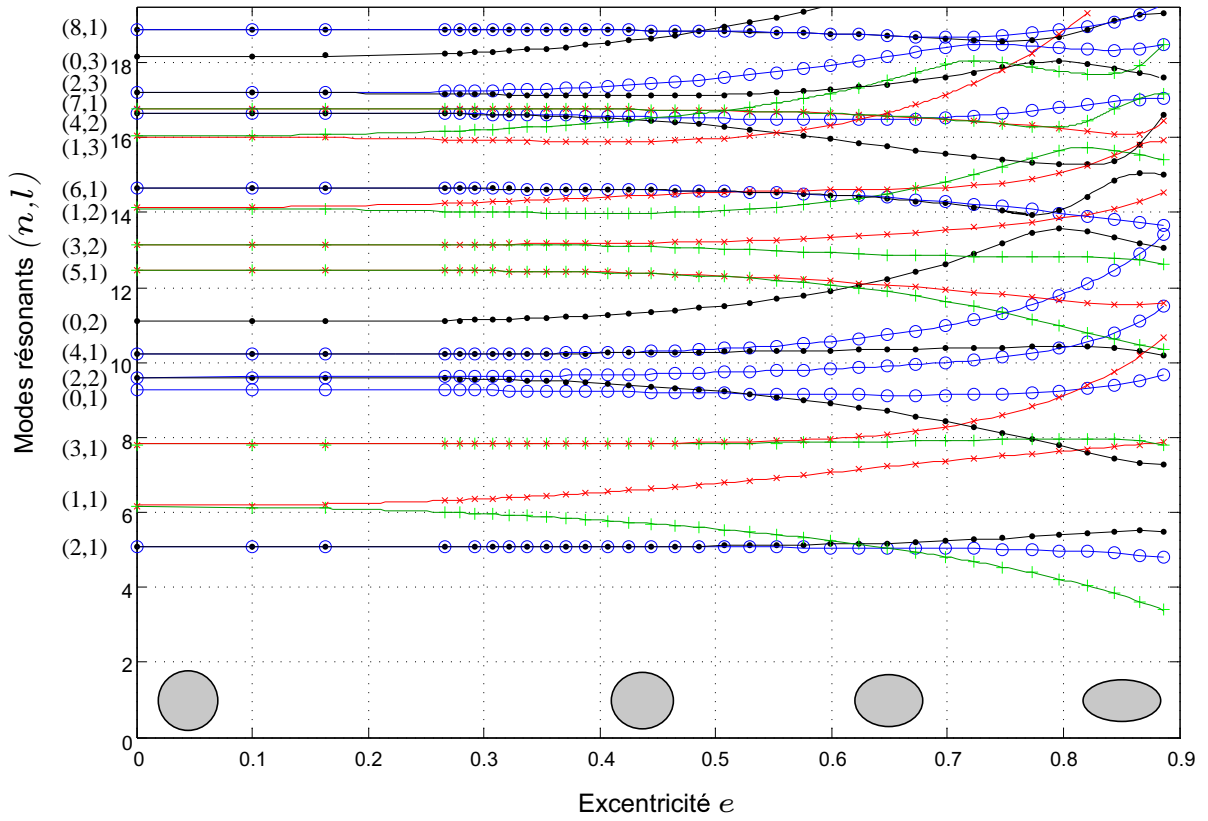
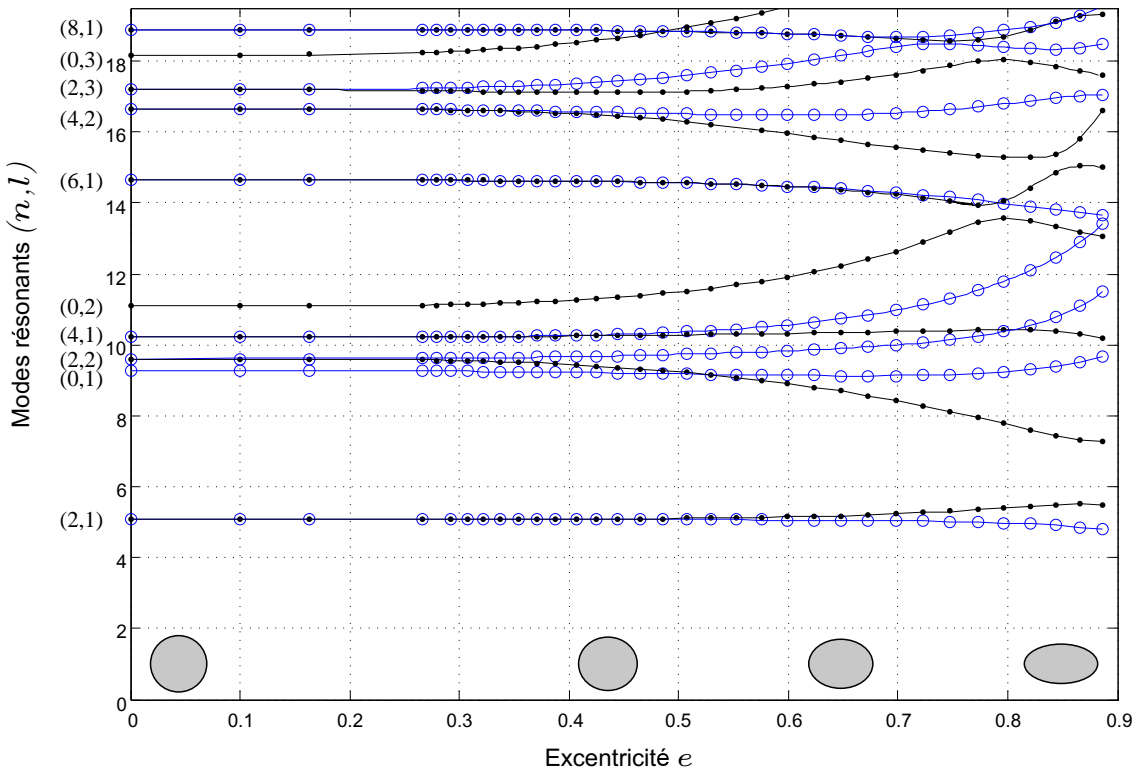
On observe la levée de dégénérescence qui est interprétée en termes de brisure de symétrie $O(2) \rightarrow C_{2v}$. Ce phénomène s'opère pour des valeurs plus ou moins élevées de l'excentricité, selon les modes. Pour certains d'entre eux (par exemple les modes $(1, \ell)$), la séparation intervient dès que la symétrie est à peine brisée. Lorsque l'indice angulaire n est pair, les résonances se séparent dans les représentations irréductibles A_1 et A_2 (Fig. 2.3), lorsque n est impair, elles se séparent en B_1 et B_2 (Fig. 2.4). Les modes résonants pour lesquels $n = 0$ sont un cas particulier, ils ne se séparent pas et sont associés aux représentations irréductibles A_1 ou A_2 .

D'autre part, une interaction entre les modes résonants est observée sur la figure (2.2). Plus précisément, pour des modes résonants appartenant à une même représentation, deux phénomènes distincts sont observés pour le domaine fréquentiel et les valeurs d'excentricité considérés :

- deux modes **non dégénérés à une excentricité donnée** se repoussent comme on peut l'observer sur la figure (2.5) pour les modes $(0, 2)$ et $(6, 1)$ en A_2 , et sur la figure (2.4) pour les modes $(1, 2)$ et $(7, 1)$ en B_1 et B_2 ;
- deux modes **dont un est dégénéré à une excentricité donnée** se croisent. Par exemple, les modes $(0, 3)$ et $(8, 1)$ se croisent dans les représentations A_1 et A_2 (Fig. 2.3), et les modes $(1, 3)$ et $(7, 1)$ se croisent dans les représentations B_1 et B_2 (Fig. 2.4).

Enfin, les modes résonants appartenant à des représentations différentes se croisent.

4. Numériquement, le suivi est effectué en incrémentant la variable u (coordonnée elliptique radiale, annexe A.1) de 0,05.

FIGURE 2.2 – Suivi des k -résonants en fonction de l'excentricité e : (\circ , A_1); (\cdot , A_2); (\times , B_1); ($+$, B_2).FIGURE 2.3 – Levée de dégénérescence (\circ , A_1); (\cdot , A_2), indice angulaire n pair.

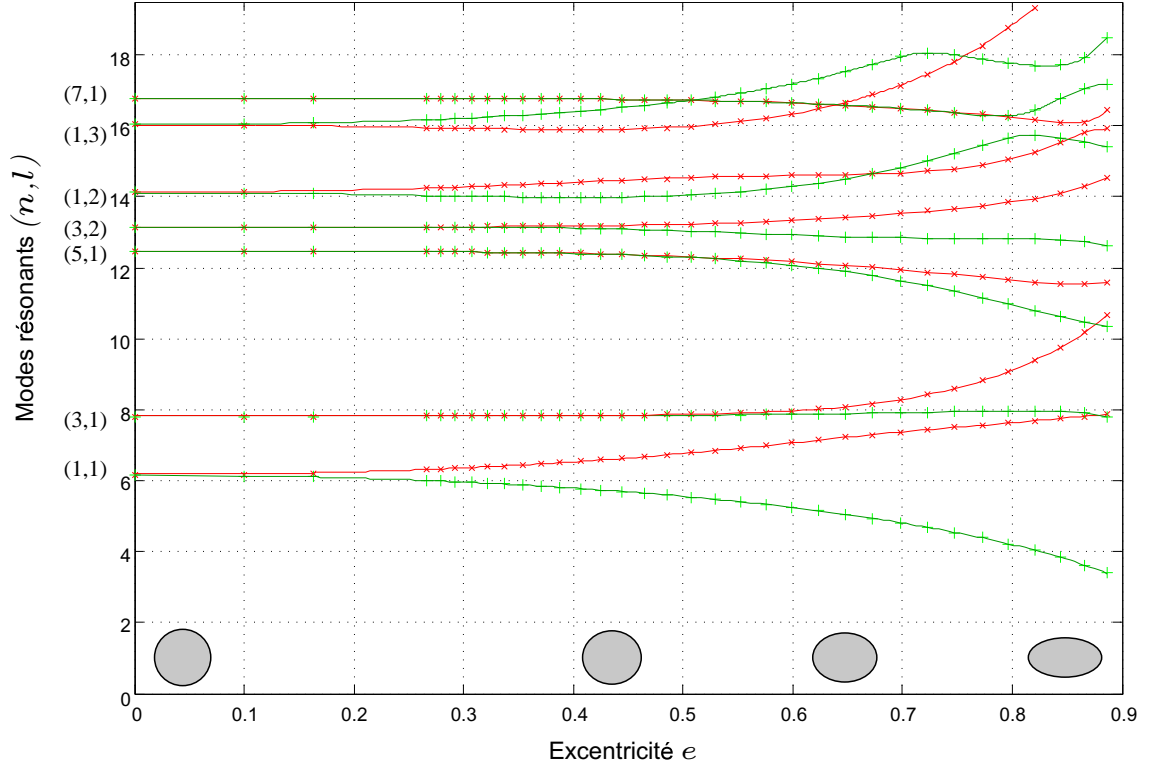
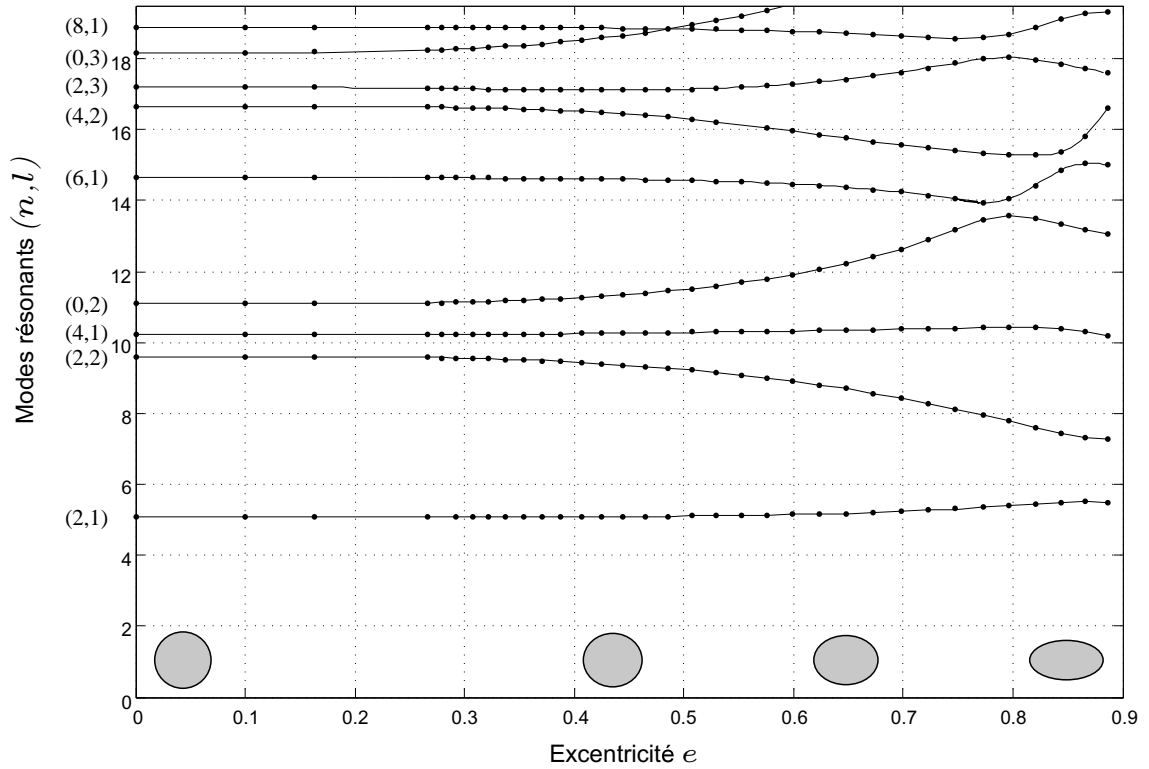
FIGURE 2.4 – Levée de dégénérescence (\times, B_1); ($+, B_2$), indice angulaire n impair.

FIGURE 2.5 – Interaction entre les modes résonants.

2.3.2.2 Déformées modales

On rappelle que le déplacement élastique associé à chaque représentation R_i est donné par les équations (2.32), (2.34), (2.36) et (2.38). Le calcul de l'amplitude du déplacement

élastique $|\mathbf{u}^{R_i}|$ (déformée modale) nécessite la détermination des coefficients inconnus à partir des systèmes d'équations (2.33), (2.35), (2.37) et (2.39).

En figure (2.6), on présente les déformées modales pour les modes (2,2) et (5,1). On choisit deux indices angulaires différents, un indice pair et un indice impair pour visualiser 4 modes bien distincts associés aux 4 représentations irréductibles A_1, A_2, B_1 et B_2 du groupe de symétrie \mathcal{C}_{2v} . Dans le cas du disque circulaire, le passage d'une représentation à une autre s'effectue par une simple rotation d'angle $\pi/2n$ (Fig. 2.6 pour $b/a = 1$). Il s'agit de modes dégénérés. En revanche, dans le cas du disque elliptique, la comparaison entre les modes A_1 et A_2 d'une part, et B_1 et B_2 d'autre part, met clairement en évidence le fait que la distinction entre les modes a une réelle signification physique. En faisant varier l'excentricité, pour chaque indice n , on visualise la levée de dégénérescence, liée à la brisure de symétrie $\mathcal{O}(2) \rightarrow \mathcal{C}_{2v}$. Dès que la symétrie est à peine brisée, le comportement du mode (2,2) en A_1 est très différent de son comportement en A_2 ; il en est de même pour le mode (5,1) en B_1 et B_2 . Comme expliqué en paragraphe 2.3.2.1, le suivi d'un mode dans une représentation est possible grâce à la théorie des groupes. On peut alors relier les modes séparés avec le mode dégénéré initialement sur le disque circulaire. D'autre part, on retrouve par l'observation du nombre de lobes d'un mode résonant la parité associée à chaque représentation.

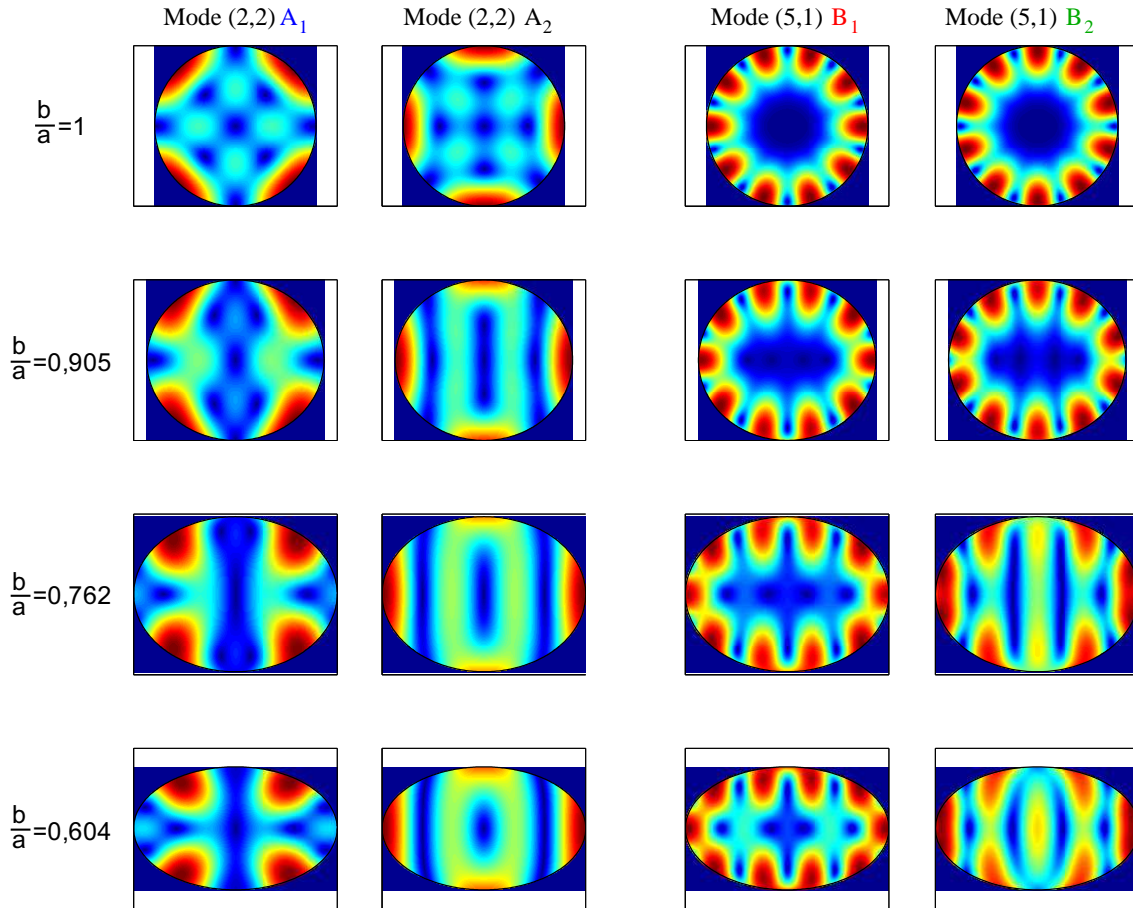


FIGURE 2.6 – Déformées modales.

2.4 LES ORBITES PÉRIODIQUES

2.4.1 Généralités

Les orbites périodiques sont des trajectoires particulières qui, par définition, reviennent à leur point de départ après un nombre donné de rebonds sur le contour à l'intérieur de l'objet étudié. Il est possible d'établir une connexion explicite entre le spectre des résonances et les orbites périodiques à l'intérieur du disque elliptique élastique en considérant la densité spectrale totale définie par

$$\rho(k) = \sum_n \delta(k - k_n) \quad (2.42)$$

où les valeurs k_n sont les résonances du disque.

Dans la limite semi-classique, la densité spectrale (Eq. 2.42) se décompose de la façon suivante [Brack et Bhaduri 1997] :

$$\rho(k) = \underbrace{\rho_0(k)}_{\text{partie lisse}} + \underbrace{\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{\Gamma} \rho_{p,\Gamma} \cos[p(kL_{\Gamma} - \Phi_{\Gamma})]}_{\text{partie oscillante}} \quad (2.43)$$

avec

- (p, Γ) : couple définissant les orbites périodiques,
- $\rho_{p,\Gamma}$: pré-facteurs,
- L_{Γ} : longueur de l'orbite périodique primitive⁵,
- Φ_{Γ} : phase.

Toutes les informations concernant les orbites périodiques sont contenues dans la partie oscillante. La partie lisse donne la densité moyenne des résonances obtenue à partir de

$$\rho_0(k) = \frac{d\mathcal{N}_0(k)}{dk}. \quad (2.44)$$

Dans l'équation (2.44), $\mathcal{N}_0(k)$ est la partie lisse de la fonction de comptage $\mathcal{N}(k)$ qui donne le nombre de résonances inférieures à k . Des résultats généraux concernant la partie lisse de la fonction de comptage spectrale d'un milieu élastique isotrope pour des conditions aux limites de frontière libre sont données par [Dupuis et al. 1960, Safarov et Vassilev 1997]. Dans ce contexte, la partie lisse est définie par

$$\mathcal{N}_0(\omega) = \frac{c_L^{-2} + c_T^{-2}}{4\pi} \mathcal{A} \omega^2 + \frac{\beta}{4\pi c_T} \mathcal{L} \omega + o(\omega) \quad (2.45)$$

avec $\omega = kc_{\text{eau}}$ dans notre cas⁶, \mathcal{A} l'aire du domaine, \mathcal{L} son périmètre et β donné par

$$\beta = \frac{4}{\gamma} - 3 + \frac{1}{\kappa} + \frac{4}{\pi} \int_{\frac{1}{\kappa}}^1 \text{Arctan} \frac{1}{4} \frac{(2 - x^{-2})^2}{\sqrt{(1 - (\kappa x)^{-2})(x^{-2} - 1)}} dx \quad \text{avec } \kappa = c_L / c_T. \quad (2.46)$$

Dans le cas du disque elliptique, $\mathcal{A} = \pi ab$ et $\mathcal{L} = 4aE(e)$ où $E(k)$ est l'intégrale elliptique complète de seconde espèce (Annexe A.1). Le terme qui contient γ ($\gamma \in]0, 1[$) provient de la contribution de l'onde de Rayleigh et satisfait l'équation de Rayleigh :

$$\gamma^6 - 8\gamma^4 + 8(3 - 2\kappa^{-2})\gamma^2 - 16(1 - \kappa^{-2}) = 0 \quad (2.47)$$

5. L'orbite dont la période est la plus courte pour un ensemble de conditions initiales données.

6. Cette normalisation a déjà été introduite en sous-section 2.3.1.

et $\gamma = \frac{c_R}{c_T}$, où c_R est la vitesse de l'onde de Rayleigh [Landau et Lifchitz 1990].

On définit également la partie oscillante de la fonction de comptage spectrale par

$$\mathcal{N}_{\text{oscill}} = \mathcal{N}(k) - \mathcal{N}_0(k). \quad (2.48)$$

La transformée de Fourier de la densité $\rho(k)$ (Eq. 2.43) permet d'obtenir les trajectoires périodiques à l'intérieur du disque elliptique, y compris celles qui changent de polarisation au cours de leur trajet lors de la réflexion sur la frontière (phénomène de conversion de mode). La partie lisse génère une fonction δ de Dirac en zéro et ne donne donc pas d'information sur les orbites périodiques. La transformée de Fourier de la partie oscillante est donnée par

$$\rho(L) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{\Gamma} \rho_{p,\Gamma} \delta(L - pL_{\Gamma}) \quad (2.49)$$

et génère une série de fonctions δ de Dirac pour les *longueurs* $L = pL_{\Gamma}$ des différentes orbites périodiques. Ces longueurs sont normalisées (Sous-section 2.3.1), adimensionnées pour une ellipse de rayon moyen unité, et pondérées par les indices de réfractions n_L et n_T pour tenir compte des deux vitesses c_L et c_T des ondes longitudinales et transversales. De façon équivalente, on peut également parler de temps de parcours, mais on choisit dans la suite de ne raisonner qu'en termes de longueurs.

Le spectre des longueurs des orbites périodiques est obtenu en évaluant numériquement

$$TF[\rho(k)](L) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{k} e^{-\alpha k^2} \rho(k) e^{-ikL} dk, \quad (2.50)$$

avec $\rho(k)$ donnée par l'équation (2.42). Dans l'expression (Eq. 2.50), on introduit

- la pondération gaussienne $e^{-\alpha k^2}$ qui permet de diminuer les oscillations résiduelles provenant de la troncature de la somme [Brack et Bhaduri 1997]. Le coefficient α est choisi tel que $e^{-\alpha k_{\text{max}}^2}$ soit suffisamment petit [Bogomolny et Hugues 1998]. En pratique, la comparaison des spectres (résolution des pics) avec ou sans pondération permet d'ajuster la valeur de ce coefficient ;
- le terme \sqrt{k} qui pondère l'amplitude des pics. Ce terme provient de la densité oscillante analytique. Dans le cas général, l'intégrande dans l'équation (2.50) est de la forme [Bogomolny et Hugues 1998]

$$\frac{e^{-\alpha k^2}}{k^r} \rho(k) e^{-ikL} \quad (2.51)$$

où r est la puissance de k dans les pré-facteurs de la formule semi-classique (Eq. 2.43). Pour des plaques élastiques, $r = 0$ [Bogomolny et Hugues 1998] et pour le disque circulaire élastique, $r = -1/2$ [Tanner et Søndergaard 2002]. On retient, de façon empirique, cette dernière valeur pour le disque elliptique élastique.

2.4.2 Le calcul des longueurs des orbites périodiques

Les longueurs des orbites périodiques sont calculées pour le disque elliptique élastique à partir d'une méthode géométrique qui utilise la description de l'ellipse en coordonnées polaires (Annexe A.1) et la loi de Snell pour la conversion de mode. Dans le cas des orbites périodiques de pression pure et de cisaillement pur, associées respectivement aux ondes longitudinales et transversales (pas de conversion de mode), les résultats obtenus sont en accord avec ceux de Sieber [Sieber 1997]. Cet auteur calcule les longueurs des orbites périodiques dans un billard elliptique (disque elliptique avec des conditions aux limites de Dirichlet) à partir d'un formalisme hamiltonien (Annexe A.7). De plus, le type d'orbites caractérisé par

un couple (n, m) ⁷ et leur condition d'existence sont déterminés. À un couple (n, m) donné peuvent être associées différentes orbites dites dégénérées [Brack et Bhaduri 1997] dont la longueur reste inchangée (Fig. 2.7). Notre méthode ne fournit pas explicitement l'existence de deux types de mouvement pour les orbites périodiques, ni leur condition d'existence, mais elle permet de calculer toutes les orbites périodiques, avec ou sans conversion de mode. On retrouve la conservation de la longueur d'une orbite dans le cas des orbites de pression pure et de cisaillement pur. Cependant, ce n'est plus le cas pour les orbites mixtes, *i.e.* avec conversion de mode. Dans ce dernier cas, seules les orbites dont les trajets sont extrémaux (temps de parcours minimal et maximal) apparaissent sur le spectre des longueurs des orbites périodiques (Sous-section 2.4.3). On interprète ce résultat comme une conséquence du principe de Fermat (ou de la phase stationnaire) [Feynman 1963] qui s'applique en élastodynamique. On associe une phase à chaque *rayon* décrivant l'orbite ; lorsque cette phase varie peu, les interférences sont constructives. Alors, le trajet de l'orbite est stationnaire et correspond au temps de parcours extrémal, c'est à dire minimal ou maximal, l'un et l'autre pouvant coexister.

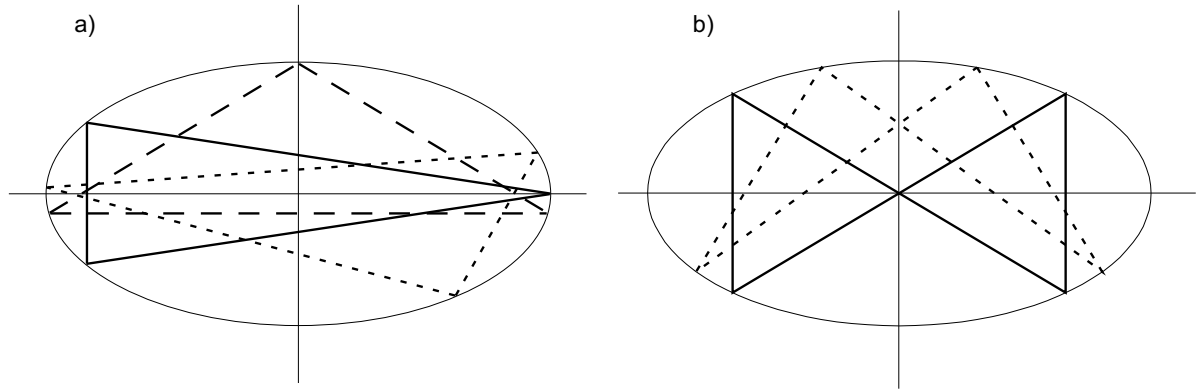


FIGURE 2.7 – a) Orbite avec mouvement de rotation $n = 3$, $m = 1$, b) Orbite avec mouvement de libration $n = 4$, $m = 1$.

Dans la suite, on précise le type de mouvement (rotation r ou libration ℓ) et la polarisation (pression pure L , cisaillement pur T , ou mixte $LTL \dots$) en notant les orbites $(n, m)_{\text{mouvement, polarisation}}$, à l'exception des orbites périodiques selon le petit axe pour lesquelles on ne spécifie pas le mouvement. De même, le mouvement n'est pas précisé pour les orbites du disque circulaire. Par exemple,

- une orbite (n, m) avec mouvement de libration et de pression pure est notée $(n, m)_L^\ell$,
- une orbite (n, m) avec mouvement de rotation et de polarisation mixte est notée $(n, m)_{LT}^r \dots$ où l'indice de polarisation contient n caractères L et T , chacun associé à un segment de l'orbite. La polarisation est écrite en suivant la séquence des segments et en respectant la symétrie de l'orbite.

2.4.2.1 Orbites avec mouvement de rotation

On considère la trajectoire représentée en figure (2.8).

7. Les orbites dans le billard elliptique sont de deux types : (i) mouvement de rotation autour d'une caustique (ellipse confocale) caractérisé par le nombre de réflexions n et le nombre de rotations m , (ii) mouvement de libration entre une caustique (hyperbole) caractérisé par le nombre de réflexions n et le nombre de libration m (nombre de points de tangence avec la caustique divisé par deux).

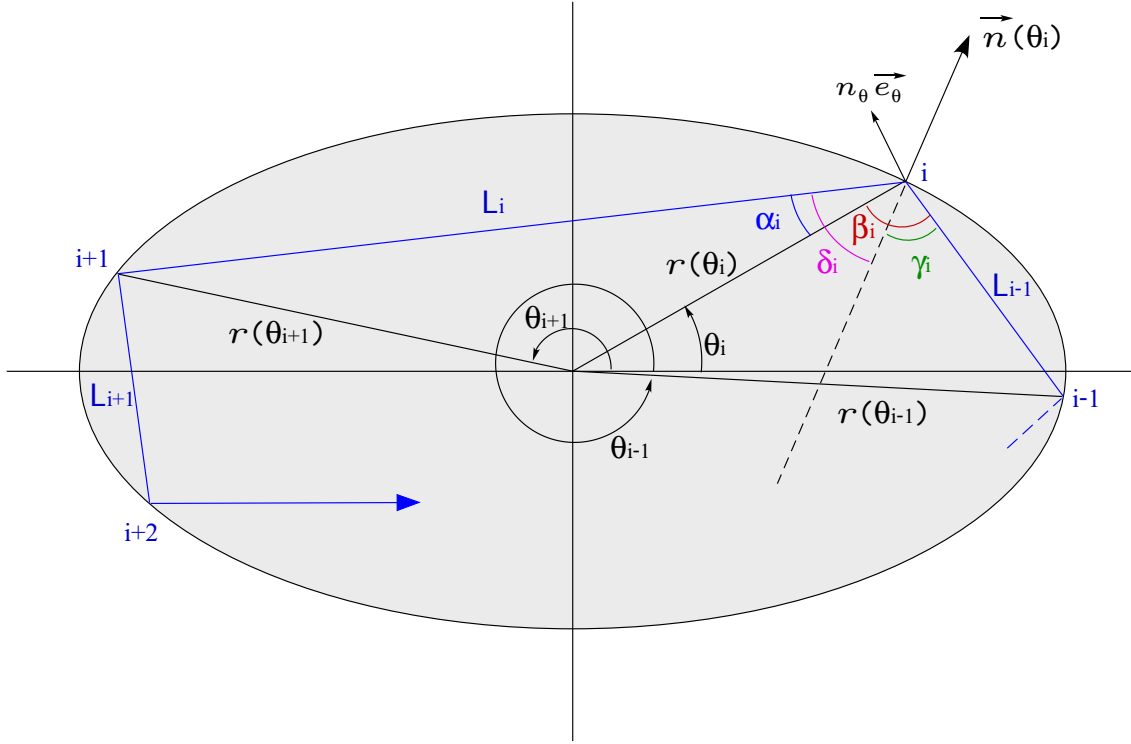


FIGURE 2.8 – Géométrie d'une trajectoire périodique arbitraire.

La longueur de la corde L_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (segment reliant deux réflexions consécutives) est obtenue en écrivant le théorème de Pythagore généralisé dans le triangle $(r(\theta_i) r(\theta_{i+1}) L_i)$ et est donnée par

$$L_i = \sqrt{r^2(\theta_i) + r^2(\theta_{i+1}) - 2r(\theta_i)r(\theta_{i+1})\cos(\theta_{i+1} - \theta_i)} \quad (2.52)$$

avec $r(\theta_i) = b(1 - e^2 \cos^2 \theta_i)^{-1/2}$ (b est le demi-grand axe, e est l'excentricité). En appliquant ce même théorème dans le triangle $(r(\theta_i) r(\theta_{i-1}) L_{i-1})$, on obtient l'angle entre $r(\theta_i)$ et L_{i-1} noté β_i et donné par

$$\beta_i = \text{Arccos} \frac{r(\theta_i) - r(\theta_{i-1}) \cos(\theta_i - \theta_{i-1})}{L_{i-1}}. \quad (2.53)$$

L'angle γ_i entre L_{i-1} et la normale $\mathbf{n}(\theta)$ est obtenu à partir de $n_\theta(\theta_i) = \sin(\beta_i - \gamma_i)$ et est donné par

$$\gamma_i = \beta_i + \text{Arcsin}(-n_\theta(\theta_i)) \quad (2.54)$$

avec $n_\theta(\theta_i) = \frac{e^2}{2} \sin 2\theta_i (1 + e^2(e^2 - 2) \cos^2 \theta_i)^{-1/2}$. Enfin, on note δ_i l'angle entre L_i et la normale $\mathbf{n}(\theta)$. Au point de réflexion i ,

- si la réflexion est spéculaire, alors $\delta_i = \gamma_i$,
- s'il y a conversion de mode, on utilise la loi de Snell $\frac{\sin \alpha_L}{c_L} = \frac{\sin \alpha_T}{c_T}$ (Fig. 2.9) :
 - ◊ lorsqu'une onde L se réfléchit en onde T , alors $\delta_i = \text{Arcsin} \left(\frac{c_T}{c_L} \sin \gamma_i \right)$,
 - ◊ lorsqu'une onde T se réfléchit en onde L , alors $\delta_i = \text{Arcsin} \left(\frac{c_L}{c_T} \sin \gamma_i \right)$.

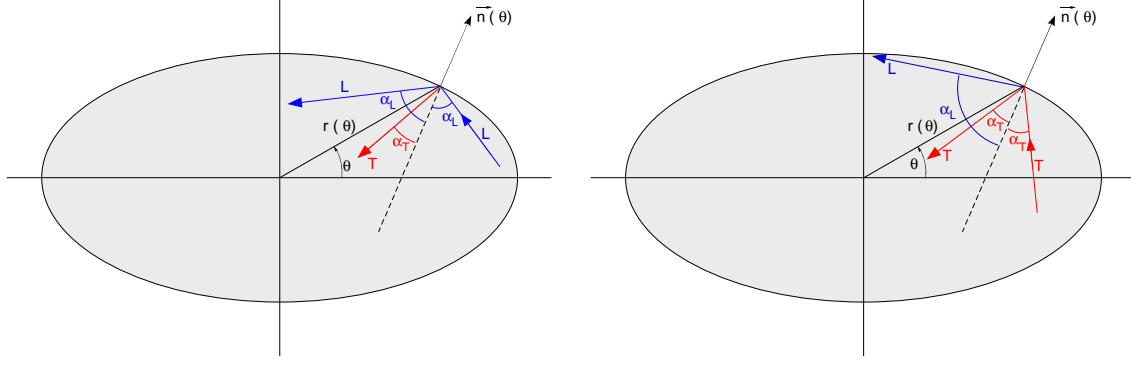


FIGURE 2.9 – Conversion de mode et loi de Snell.

On impose la condition initiale (point de départ de l'orbite) θ_1 entre 0 et $\pi/2$ et la polarisation de l'orbite. Les conditions de périodicité s'écrivent

$$L_0 = L_n \text{ et } L_{n+1} = L_1, \quad (2.55a)$$

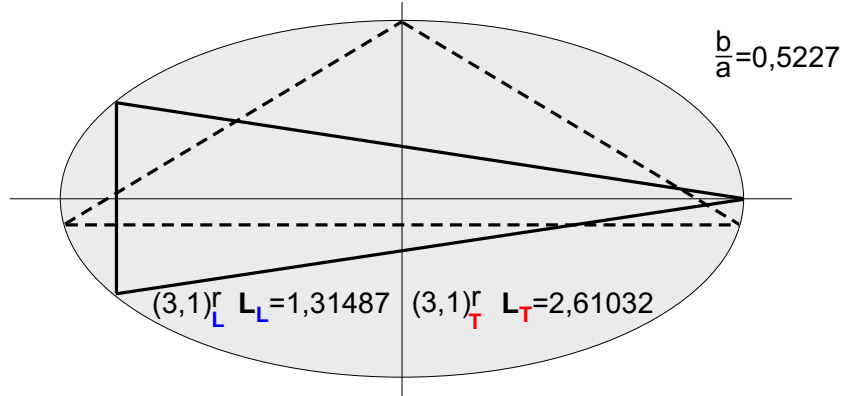
$$\theta_0 = \theta_n \text{ et } \theta_{n+1} = \theta_1. \quad (2.55b)$$

Connaissant l'angle θ_1 , on détermine les angles $\theta_2, \dots, \theta_n$ en résolvant l'équation non-linéaire

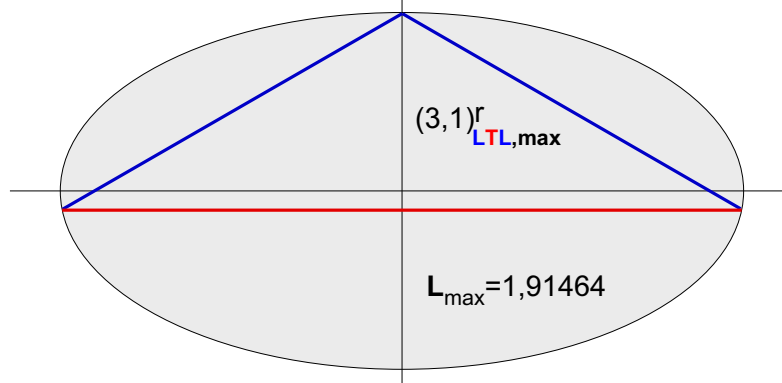
$$\pi + \beta_i + \theta_i - \beta_{i+1} - \theta_{i+1} = \gamma_i + \delta_i. \quad (2.56)$$

La connaissance des angles θ_i permet alors de calculer les longueurs L_i et ainsi obtenir la longueur totale de l'orbite périodique. Nous avons écrit un code de calcul à l'aide du logiciel Mathematica[®] [Wolfram] qui nous permet de déterminer les orbites en imposant le nombre de segments et leur polarisation. Dans ce code de calcul, les longueurs L_i sont pondérées par les indices de réfractions n_L et n_T (Sous-section 2.3.1) pour tenir compte de la polarisation de l'orbite (pression pure, cisaillement pur, mixte). Dans le cas des orbites périodiques de pression pure ou de cisaillement pur, la longueur calculée est inchangée quelle que soit la condition initiale imposée en θ_1 entre 0 et $\pi/2$ (exemple de l'orbite $n = 3, m = 1$ en figure (2.10a)). Ce n'est plus le cas lorsqu'il y a conversion de mode où un trajet minimal et un trajet maximal coexistent pour une même orbite (Figs. 2.10b et 2.10c).

a) Orbite (3,1) avec mouvement de rotation de pression pure (L) ou de cisaillement pur (T)



b) Orbite (3,1) avec mouvement de rotation avec conversion de mode **LTL Trajet maximal**



c) Orbite (3,1) avec mouvement de rotation avec conversion de mode **LTL Trajet minimal**

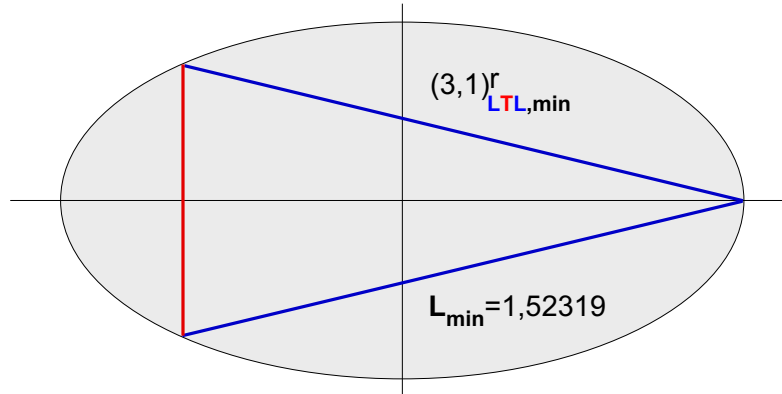


FIGURE 2.10 – Orbites périodiques $n = 3, m = 1$ avec mouvement de rotation pour un disque elliptique $b/a = 0,5227$ a) *pression pure* ou *cisaillement pur*, b) avec conversion de mode **LTL**, trajet maximal, c) avec conversion de mode **LTL**, trajet minimal.

2.4.2.2 Orbites avec mouvement de libration

Il est possible de calculer les orbites avec mouvement de libration en utilisant les fonctions L_i (Eq. 2.52), β_i (Eq. 2.53) et γ_i (Eq. 2.54) définies dans le paragraphe 2.4.2.1. Les expressions de L_i et β_i sont inchangées, tandis que l'équation (2.54) est donnée, dans le cas des orbites pour lesquelles un segment passe par le centre de l'ellipse, par

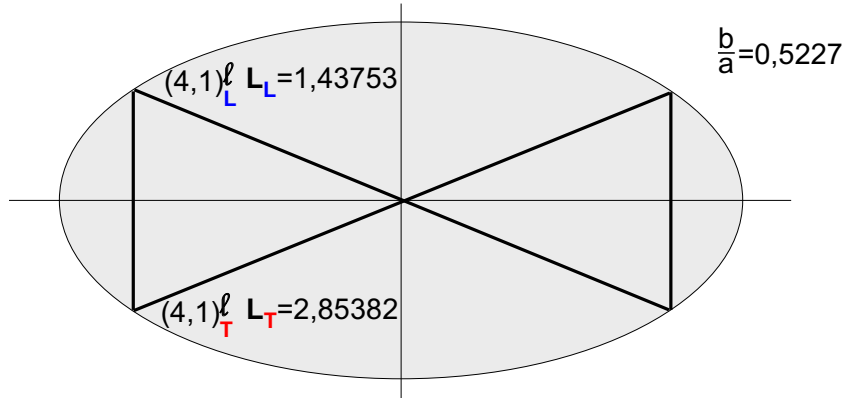
$$\gamma_i = \beta_i + \text{Arcsin}(\mp n_\theta(\theta_i)). \quad (2.57)$$

Le signe de l'argument de la fonction Arcsin change à chaque fois qu'un segment passe par le centre de l'ellipse. Enfin, l'équation à résoudre s'écrit alors

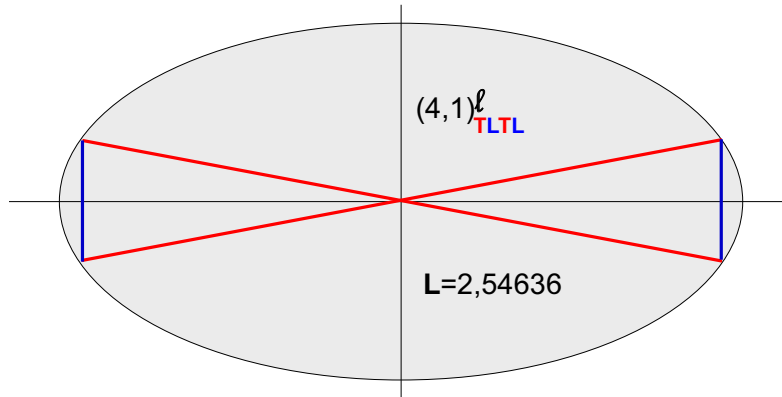
$$\pi + \beta_i - \beta_{i+1} - |\theta_{i+1} - \theta_i| = \gamma_i + \delta_i. \quad (2.58)$$

La condition initiale consiste à fixer la polarisation et la géométrie de l'orbite en imposant une relation entre les angles θ_i . On présente en figure (2.11) les longueurs calculées pour l'orbite $n = 4$, $m = 1$ dans les cas sans conversion de mode, *i.e.* pression pure ou cisaillement pur (Fig. 2.11a), et avec conversion de mode (Figs. 2.11b et 2.11c). Bien que ces deux orbites soient de type $(4, 1)^\ell$ (même *géométrie*), les longueurs calculées ne sont pas identiques car elles correspondent à deux conversions de mode différentes, et non à l'existence de 2 trajets extrémaux, comme dans l'exemple présenté en figures (2.10b) et (2.10c).

a) Orbite (4,1) avec mouvement de libration de pression pure (L) ou de cisaillement pur (T)



b) Orbite (4,1) avec mouvement de libration avec conversion de mode TLT



c) Orbite (4,1) avec mouvement de libration avec conversion de mode LTL

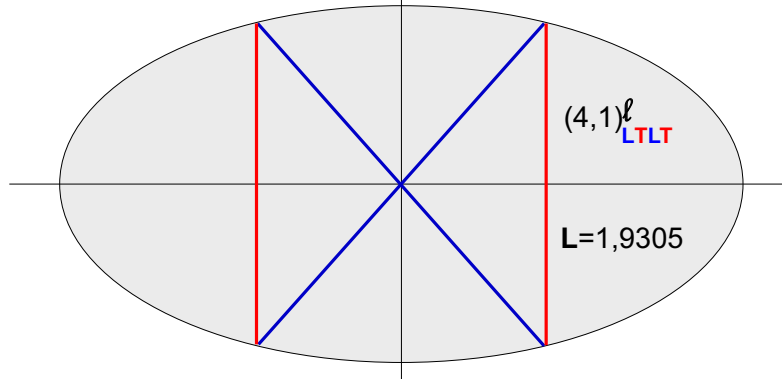


FIGURE 2.11 – Orbites périodiques $n = 4$, $m = 1$ avec mouvement de libration pour un disque elliptique $b/a = 0,5227$ a) de *pression pure* ou *cisaillement pur*, b) avec conversion de mode TLT, c) avec conversion de mode LTL.

2.4.3 Spectres des longueurs des orbites périodiques

La transformée de Fourier de la densité spectrale (Eq. 2.42) permet d'obtenir le spectre des longueurs des orbites périodiques. Numériquement, on trace la densité spectrale d'énergie $|TF[\rho(k)](L)|^2$ dans la gamme de fréquence $0 < k \leq 250$, avec $TF[\rho(k)](L)$ donnée par l'équation (2.50) en choisissant le paramètre de la pondération gaussienne $\alpha = 2,5$.

Les spectres de Fourier obtenus pour des disques elliptiques en aluminium ($c_L = 6344,8 \text{ m.s}^{-1}$, $c_T = 3196 \text{ m.s}^{-1}$) avec $b/a = 1; 0,9414; 0,9051; 0,8337$ et $0,7398$ sont pré-

sentés respectivement en figures (2.12-2.16). Ces spectres présentent de nombreux pics aux longueurs qui correspondent à

- des orbites associées à des ondes longitudinales (de pression pure),
- des orbites associées à des ondes transversales (de cisaillement pur),
- des orbites de polarisation mixte L et T (conversion de mode),
- l'orbite associée à l'onde de Rayleigh, qui se propage sur la frontière du disque. Elle est identifiée sans ambiguïté sur tous les spectres présentés, y compris pour d'autres valeurs d'excentricités (spectres non présentés dans la thèse).

Les lignes en pointillés correspondent à une accumulation vers une orbite limite, avec mouvement de rotation sur un tour, lorsque les segments de pression pure et de cisaillement pur deviennent tangents à la frontière.

À mesure que la déformation augmente, *i.e.* que b/a diminue, deux phénomènes importants sont observés :

- un dédoublement de pics associé au phénomène de conversion de mode : deux pics associés à certaines orbites de même type $(n, m)_{\text{polarisation}}^{\text{mouvement}}$ apparaissent sur les spectres (Figs. 2.13-2.16). Ces deux longueurs correspondent aux trajets maximal et minimal parcourus par cette orbite. Le principe de Fermat donne une interprétation physique à cette observation.
- la bifurcation de l'orbite *aller-retour(s)* selon le petit-axe [Sieber 1997, Brack et Bhaduri 1997, Magner et al. 1999] se produit et les orbites avec mouvement de libration émergent sur les spectres.

D'autre part, on note également que la résolution des pics diminue. Cet effet, purement numérique, est liée à la *perte* de résonances quand leur recherche s'effectue à haute fréquence et pour des valeurs d'excentricités élevées. On peut estimer le nombre de résonances *perdus* en traçant $\mathcal{N}_{\text{oscill}} = \mathcal{N}(k) - \mathcal{N}_0(k)$ ⁸. La *remontée* du spectre en $L = 0$ est due à la partie lisse de la densité spectrale mais elle ne gêne en rien l'identification des orbites (Sous-section 2.4.1).

On présente en figure (2.12) le spectre des longueurs des orbites périodiques pour le disque circulaire ($b/a = 1$). Différents types d'orbites et leur polarisation sont identifiés, notamment l'orbite associée à l'onde de Rayleigh, qui apparaît à une longueur $L \approx 3,1$. Le disque circulaire est ensuite déformé vers le disque elliptique $b/a = 0,9414$ (Fig. 2.13) et le phénomène de dédoublement de pics se produit pour les orbites $(3,1)_{LT}^r$, $(3,1)_{TL}^r$ et $(4,1)_{T2LT}^r$ ($1,5 \leq L \leq 2,5$). Ces orbites présentent un unique pic sur le spectre des longueurs du disque circulaire (Fig. 2.12) tandis que deux pics apparaissent sur la figure (2.13). Ils sont associés aux trajets maximal et minimal parcourus par ces orbites périodiques. Cette observation obéit au principe de Fermat.

En augmentant la déformation à $b/a = 0,9051$ (Fig. 2.14), le phénomène de séparation s'accroît. D'autre part, le phénomène de bifurcation se produit et la première orbite avec mouvement de libration émerge, avec conversion de mode : l'orbite $(6,2)_{T2LT2L}^l$ est identifiée aux environs de $L \approx 3,6$. Plus précisément, cette orbite est issue de la bifurcation, à $b/a = 0,9121$, de l'orbite effectuant 3 aller-retours selon le petit axe avec $4L$ et $2T$.

À mesure que le rapport b/a diminue, les pics associés aux trajets extrémaux se séparent davantage et de nouvelles orbites de libration émergent sur le spectre du disque elliptique $b/a = 0,8337$ (Fig. 2.15), avec et sans conversion de mode. L'orbite mixte $(6,2)_{T4LT}^l$ apparaît à $L \approx 3,4$, elle possède le même nombre de segments en L et T que l'orbite $(6,2)_{T2LT2L}^l$ mais sa longueur est différente, les segments polarisés n'apparaissant pas dans le même ordre. Les premières orbites avec mouvement de libration sans conversion de mode (pression pure

8. On perd moins de 1% des résonances de $b/a = 1$ jusqu'à $b/a = 0,8337$ et 6% pour $b/a = 0,7398$ dans la gamme de fréquence $0 < k \leq 250$.

et cisaillement pur) apparaissent à $L \approx 2,6$ et $L \approx 5,1$. Elles sont générées, respectivement, par la bifurcation, à $b/a = 0,8643$, des orbites $3 \times (2,1)_L$ et $3 \times (2,1)_T$ selon le petit axe.

Enfin, pour une déformation plus importante ($b/a = 0,7398$, Fig. (2.16)), on observe une fois encore une accentuation de la séparation des pics et l'émergence des orbites de librations $(6,2)_{L2TL2T}^\ell$ et $(4,1)_{TLTL}^\ell$.

On note que les orbites avec mouvement de libration présentent des pics d'amplitude bien marquée tandis que les orbites qui bifurquent et les génèrent, après bifurcation, ne sont pas observables sur les figures (2.13-2.16).

En ce qui concerne l'orbite de Rayleigh, le pic associé est identifié sans ambiguïté pour tous les rapports de déformation b/a (Figs 2.13-2.16).

Enfin, la figure (2.17) met en évidence le phénomène de séparation des pics associés aux longueurs des deux orbites $(3,1)_{LTL}^r$ et $(3,1)_{TLT}^r$, à mesure que la déformation augmente à partir du disque circulaire. On rappelle que, pour chaque orbite, les deux longueurs sont associées aux trajets minimal et maximal qu'elle parcourt.

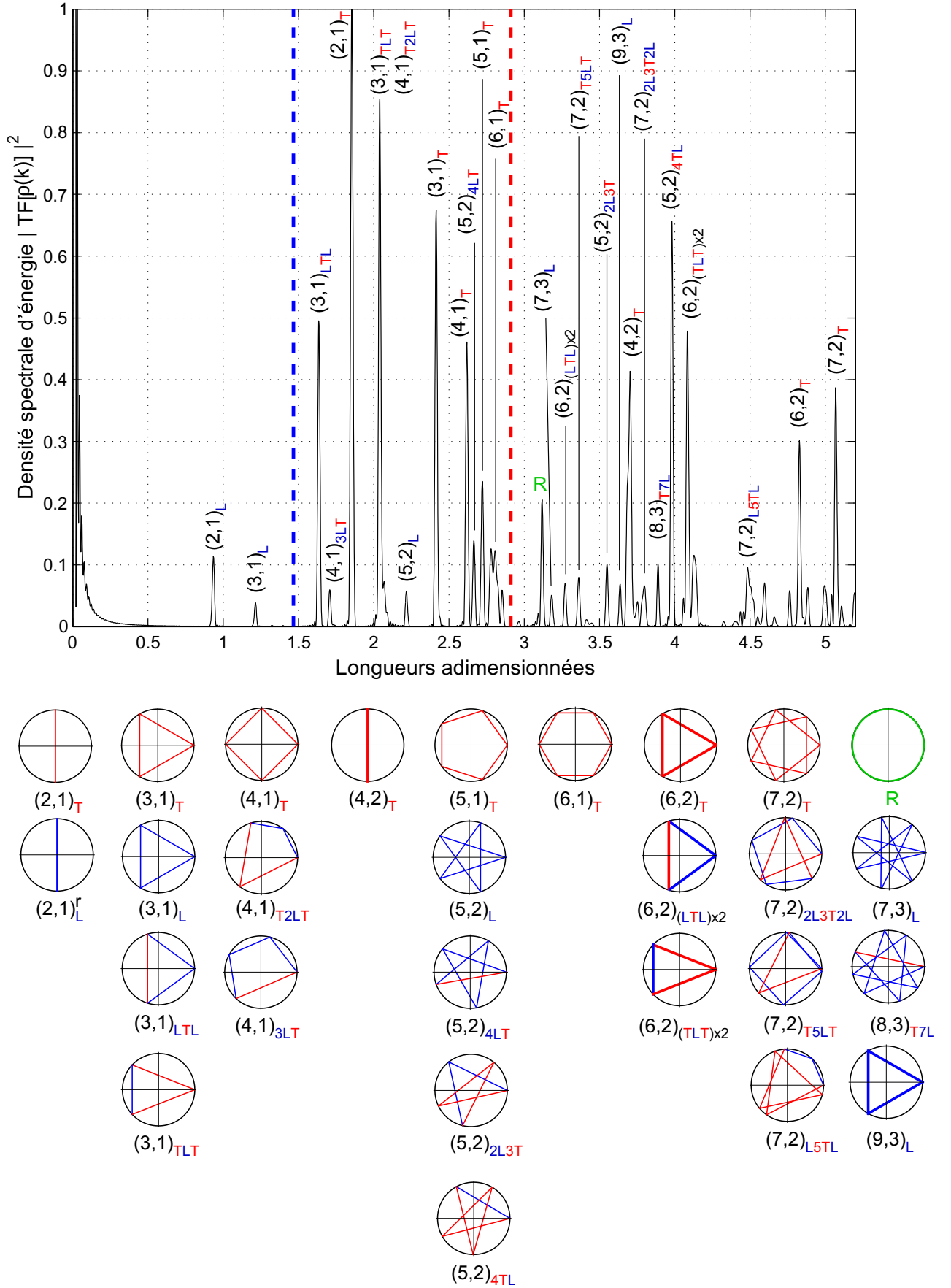
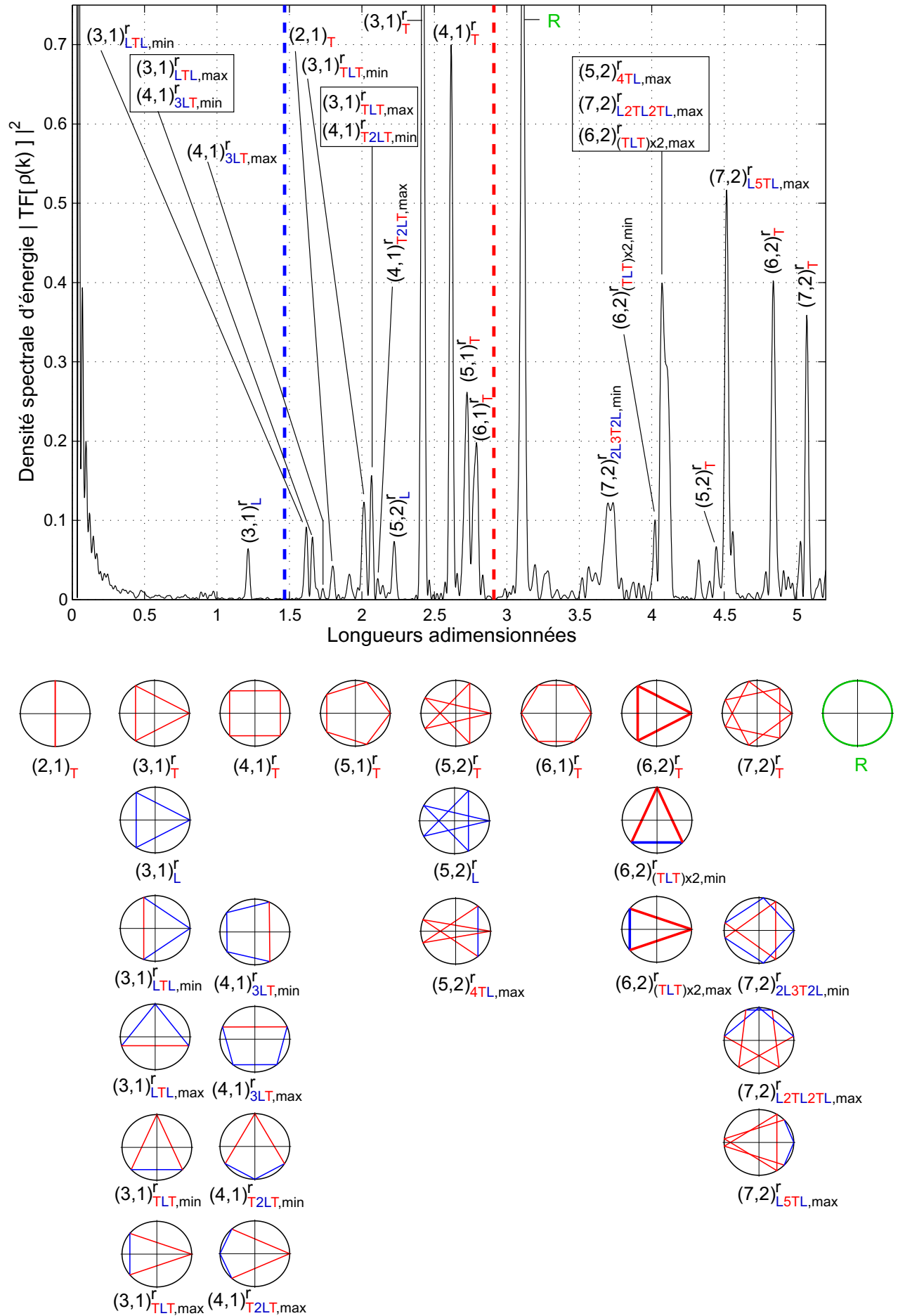
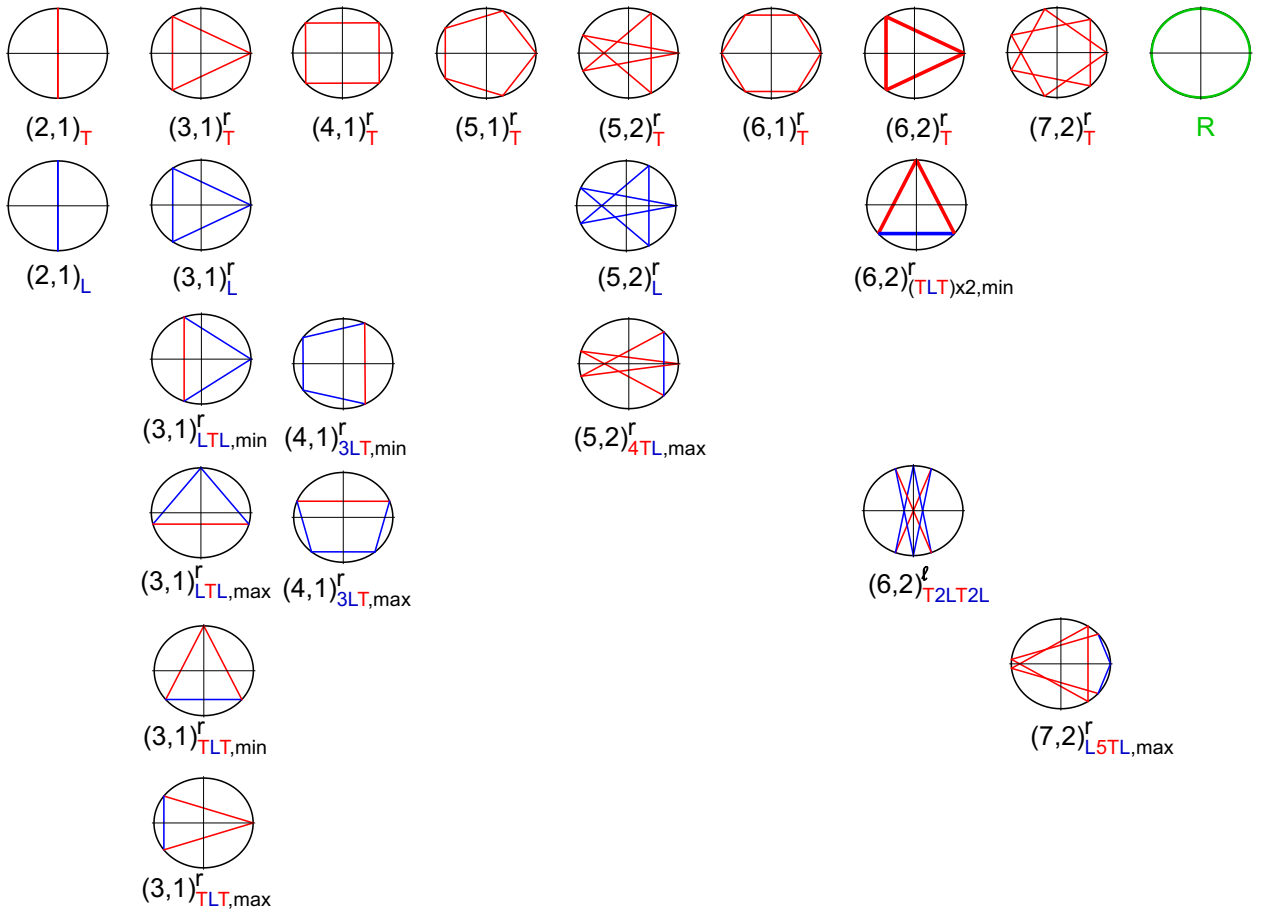
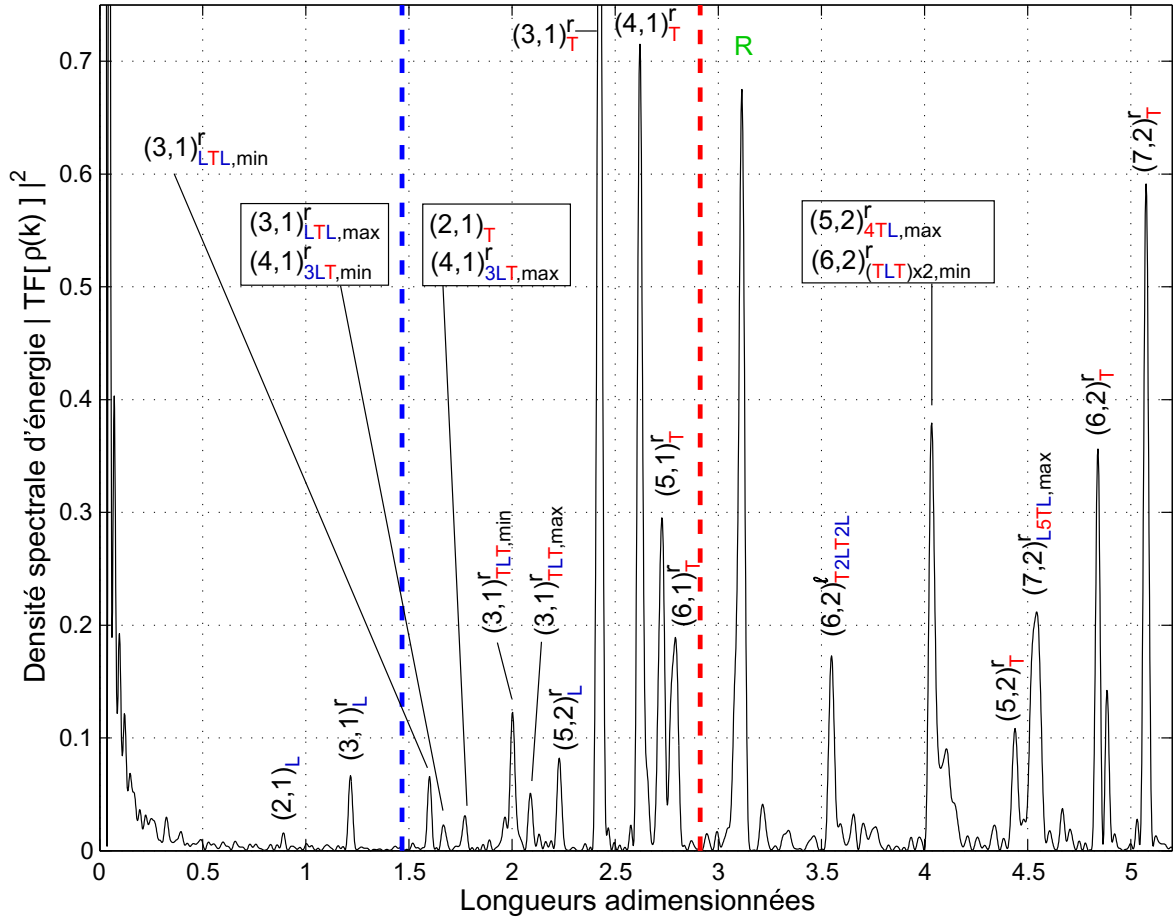
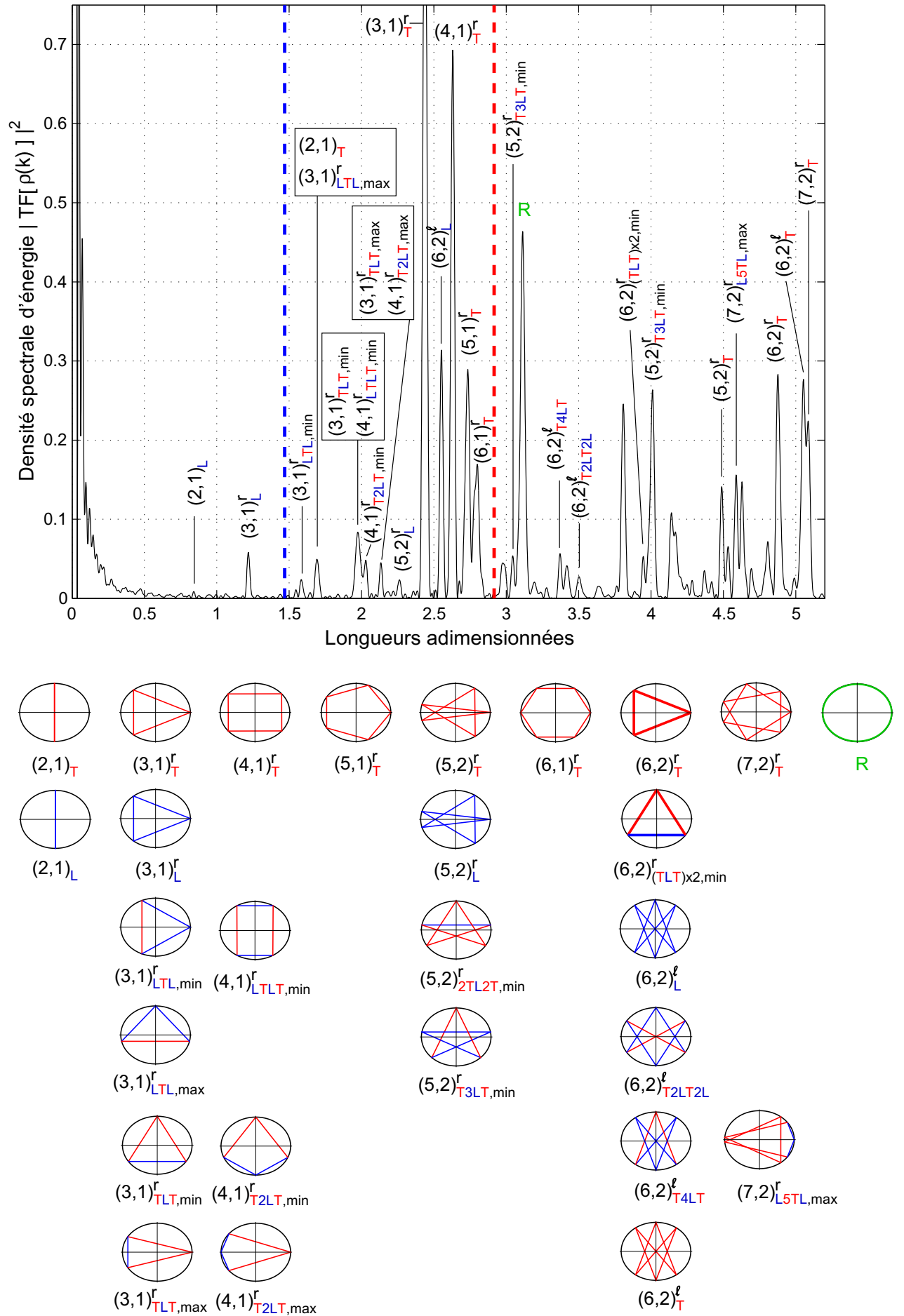
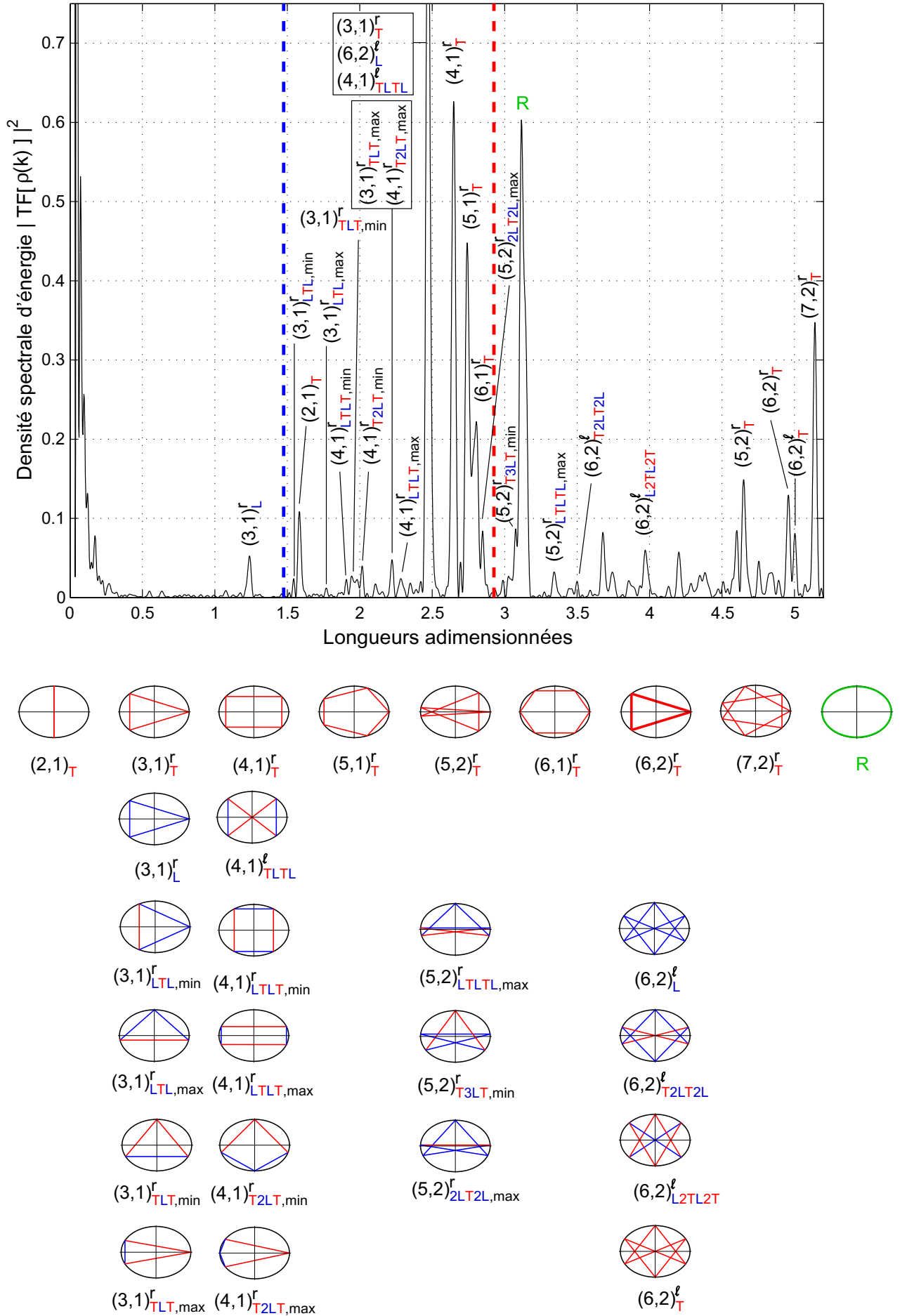


FIGURE 2.12 – Spectre des orbites périodiques pour un disque circulaire en aluminium.

FIGURE 2.13 – Spectre des orbites périodiques pour un disque elliptique en aluminium $b/a = 0,9414$.

FIGURE 2.14 – Spectre des orbites périodiques pour un disque elliptique en aluminium $b/a = 0,9051$.

FIGURE 2.15 – Spectre des orbites périodiques pour un disque elliptique en aluminium $b/a = 0,8337$.

FIGURE 2.16 – Spectre des orbites périodiques pour un disque elliptique en aluminium $b/a = 0,7398$.

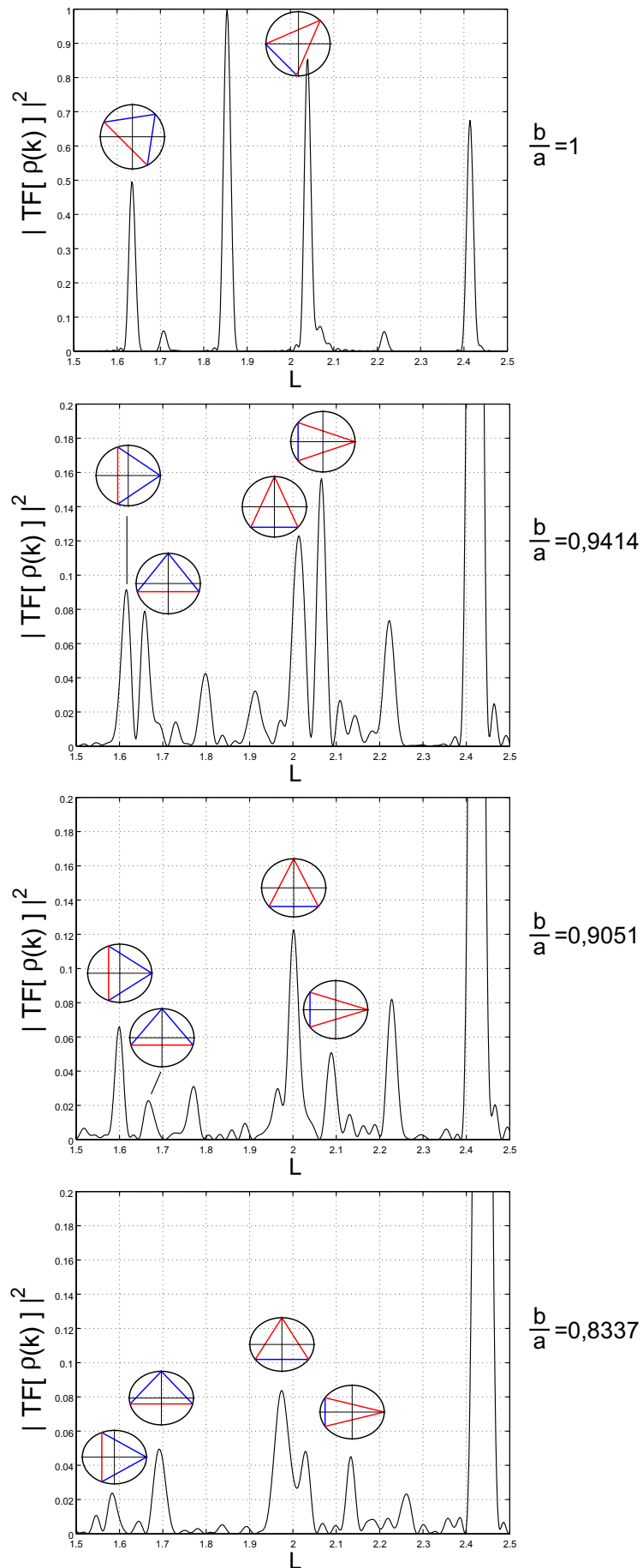


FIGURE 2.17 – Mise en évidence du phénomène de séparation des pics associés aux orbites $(3,1)_{LTL}^r$ et $(3,1)_{TLT}^r$, observation des trajets minimal et maximal.

CONCLUSION DU CHAPITRE

À partir des considérations de symétrie, nous avons obtenu une classification des résonances du disque elliptique élastique : elles se classent en quatre familles distinctes associées aux quatre représentations irréductibles A_1, A_2, B_1, B_2 du groupe de symétrie C_{2v} du disque elliptique. Chaque mode résonant est identifié par les deux nombres (n, ℓ) du formalisme modal associé au disque circulaire mais également par le nom de la représentation irréductible associée. Nous avons mis en évidence la levée de dégénérescence des résonances et des considérations algébriques (théorie des groupes) ont permis de comprendre et d'interpréter ce phénomène en termes de brisure de symétrie. L'utilisation de la théorie des groupes simplifie de façon significative le traitement numérique du problème. De plus, les calculs peuvent être effectués pour de grandes excentricités mais également pour des fortes valeurs du nombre d'onde réduit kr . En comparant avec les résultats obtenus à partir d'un code d'éléments finis, l'implémentation numérique de notre méthode présente l'avantage d'être rapide et de fournir des valeurs précises des résonances, y compris à haute fréquence.

Le lien connu entre le spectre des résonances et le spectre des longueurs (ou des temps de parcours) des orbites périodiques a été exploité. Les orbites de pression pure, de cisaillement pur ainsi que celles incluant la conversion de mode sont mises en évidence. Dans ce dernier cas, le spectre des longueurs fait apparaître les trajets minimal et maximal pour une orbite donnée. Le principe de Fermat nous a permis d'interpréter ce phénomène. Enfin, l'orbite de Rayleigh apparaît également de façon claire pour diverses excentricités.

Dans le chapitre 3, consacré au problème de la diffusion acoustique par des cylindres elliptiques élastiques, la levée de dégénérescence des résonances liée à la même brisure de symétrie $O(2) \rightarrow C_{2v}$ est étudiée théoriquement et expérimentalement. Les conclusions relatives à l'apport de notre méthode (1^{er} paragraphe ci-dessus) peuvent être intégralement reprises dans ce même chapitre.

Enfin, dans le chapitre 4, les modes résonants sont étudiés expérimentalement dans le cas tridimensionnel. On s'intéresse, dans ce cas, à la levée de dégénérescence qui s'opère au cours de la déformation d'une sphère vers un sphéroïde (brisure de symétrie $O(3) \rightarrow D_{\infty h}$).

DIFFUSION ACOUSTIQUE EN GÉOMÉTRIE ELLIPTIQUE

SOMMAIRE

3.1	GÉNÉRALITÉS SUR LA DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR UN OBJET DE FORME SIMPLE	53
3.2	ÉTUDE THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE	53
3.2.1	Position du problème	53
3.2.2	Écriture des conditions aux limites	54
3.2.3	Détermination des quantités physiques	62
3.2.4	Résultats numériques	63
3.3	ÉTUDE EXPÉRIMENTALE ET COMPARAISON THÉORIE/EXPÉRIENCE	68
3.3.1	Description du dispositif d'excitation et de mesure	68
3.3.2	Description du dispositif expérimental	70
3.3.3	Insonification par une onde plane et considérations de symétrie	71
3.3.4	Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux	71
	CONCLUSION DU CHAPITRE	82

DANS ce chapitre, on présente l'étude théorique et expérimentale de la diffusion acoustique par des cylindres elliptiques élastiques.

On rappelle tout d'abord quelques généralités sur la diffusion acoustique par un objet de forme simple en section 3.1.

En section 3.2, on présente l'étude théorique et numérique du problème. On résout alors le problème de diffusion à partir du formalisme modal en prenant en compte le rôle des symétries. Ce dernier est alors découplé selon les 4 représentations irréductibles du groupe de symétrie du diffuseur. L'analyse ainsi que le traitement numérique sont alors considérablement simplifiés.

On présente ensuite en section 3.3 les résultats expérimentaux concernant plusieurs cylindres elliptiques de différentes excentricités. Ces résultats sont obtenus par spectroscopie ultrasonore des ondes diffusées par les cylindres. Cette méthode classique, très utilisée en diffusion acoustique, consiste en l'analyse spectrale des ondes ultrasonores par calcul de la transformée de Fourier de la portion de signal que l'on désire analyser à l'aide d'un algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT). On obtient ainsi des spectres (d'amplitude, d'énergie ou de puissance) qui, une fois normalisés, peuvent directement être comparés aux résultats numériques obtenus d'après nos modèles théoriques. Enfin, grâce au dispositif expérimental utilisé, nous avons également pu obtenir des diagrammes angulaires, qui, pour

une fréquence donnée, décrivent la répartition spatiale en champ lointain de l'amplitude des ondes ultrasonores diffusées par les cylindres. La levée de dégénérescence prévue par la théorie est observée numériquement et expérimentalement.

3.1 GÉNÉRALITÉS SUR LA DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR UN OBJET DE FORME SIMPLE

On considère un objet diffuseur soumis à un champ incident émanant d'une distribution de sources quelconque. Le milieu extérieur Ω_e est homogène et caractérisé par une vitesse de propagation c . Dans le cadre d'un régime harmonique (dépendance temporelle en $e^{-i\omega t}$ implicite dans la suite, ω étant la fréquence angulaire), on se ramène à un problème dépendant de la variable d'espace \mathbf{x} uniquement. Le champ acoustique total, somme du champ incident et du champ diffusé par l'objet étudié, est alors solution de l'équation d'Helmholtz

$$(\Delta + k^2)\Phi(\mathbf{x}) = -S(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

dans Ω_e , où $k = \omega/c$ est le nombre d'onde, et où $S(\mathbf{x})$ est une densité volumique représentant la distribution de sources. De plus, le champ total doit satisfaire à deux types de conditions aux limites :

- sur la surface du diffuseur, aux conditions aux limites dictées par la nature physique de l'objet considéré d'une part et du milieu de propagation d'autre part ;
- à l'infini spatial, à la condition de rayonnement de Sommerfeld, imposant au champ diffusé une structure d'onde sortante.

Dans notre étude, on considère un objet élastique de masse volumique ρ_s , on note c_L la vitesse de propagation des ondes longitudinales, c_T celle des ondes transversales, et on introduit les nombres d'ondes $k_L = \omega/c_L$ et $k_T = \omega/c_T$. Les conditions aux limites à imposer sur la surface de l'objet sont alors : la continuité du déplacement normal et la continuité de la traction.

3.2 ÉTUDE THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE DE LA DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR UN CYLINDRE ÉLASTIQUE ELLIPTIQUE INFINI

3.2.1 Position du problème

On considère un cylindre elliptique infini immergé dans un fluide homogène de masse volumique ρ_f et dans lequel la vitesse du son est notée c . L'axe Oz est l'axe du cylindre et (ρ, θ) sont les coordonnées polaires dans le plan perpendiculaire à Oz . La géométrie ainsi que les notations employées sont présentées en figure (3.1) et les définitions de $\mathbf{n}(\theta)$ et $r(\theta)$ sont données en sous-section 1.2.1.

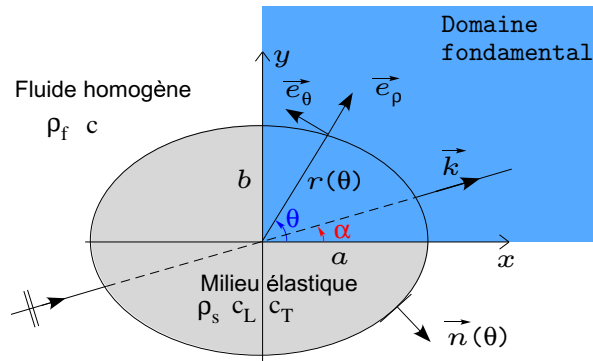


FIGURE 3.1 – Géométrie du problème.

Le vecteur de propagation \mathbf{k} de l'onde plane incidente est perpendiculaire à l'axe z et forme un angle α avec l'axe Ox . D'autre part, le fait que le cylindre soit infini nous permet

de supprimer la dépendance en la variable z . Le problème se réduit alors à un problème bidimensionnel. L'onde incidente est exprimée en termes de pression acoustique :

$$p_{inc} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(k\rho) e^{in(\theta-\alpha)}. \quad (3.2)$$

La pression diffusée doit satisfaire à la condition de rayonnement de Sommerfeld à l'infini et elle est donnée par

$$p_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n A_n^S H_n^{(1)}(k\rho) e^{in\theta} \quad (3.3)$$

et A_n sont des coefficients inconnus à déterminer.

On rappelle le déplacement élastique (Eq. 2.3) obtenu à partir de la décomposition d'Helmholtz

$$\mathbf{u} = u_\rho \mathbf{e}_\rho + u_\theta \mathbf{e}_\theta = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\theta, \quad (3.4)$$

où ϕ et $\psi = \psi \mathbf{e}_z$, les potentiels scalaire et vectoriel associés respectivement aux ondes longitudinales et transversales, sont de la forme (Eqs. 1.15) du chapitre 1)

$$\phi = \frac{1}{\rho_s \omega^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^L J_n(k_L \rho) e^{in\theta}, \quad \psi = \frac{1}{\rho_s \omega^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^T J_n(k_T \rho) e^{in\theta}, \quad (3.5)$$

où A_n^j , $j \in \{L, T\}$ sont des coefficients inconnus.

Considérations de symétrie et théorie des groupes D'après les résultats du chapitre 1, dans le cas de la géométrie elliptique (Sous-section 1.2.1), les quantités physiques (champs, traction et déplacement) sont à décomposer sur les représentations irréductibles du groupe C_{2v} . Comme cela a été expliqué dans le chapitre 2, en écrivant la condition aux limites dans chaque représentation, le problème est découpé : les résonances sont classées suivant les représentations. On rappelle également que l'étude est restreinte au domaine fondamental correspondant à un quart de l'ellipse, θ variant de 0 à $\pi/2$, (Fig. 3.1).

3.2.2 Écriture des conditions aux limites

Pour déterminer les résonances et les coefficients inconnus, les conditions aux limites

(i) continuité du déplacement normal $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}(\theta) = \frac{1}{\rho_f \omega^2} \nabla(p_{inc} + p_s) \cdot \mathbf{n}(\theta)$,

(ii) continuité de la traction $\mathbf{t} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n}(\theta) = -(p_{inc} + p_s) \mathbf{n}(\theta)$,

sont appliquées en $\rho = r(\theta)$ à la surface du diffuseur. En utilisant les expressions de la normale $\mathbf{n}(\theta) = n_\rho \mathbf{e}_\rho + n_\theta \mathbf{e}_\theta$ (Eq. 1.6) et du déplacement $\mathbf{u} = u_\rho \mathbf{e}_\rho + u_\theta \mathbf{e}_\theta$ (Eq. 2.3), on obtient

(i)

$$\left(-\frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) n_\rho + \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) n_\theta = \frac{1}{\rho_f \omega^2} \left(\frac{\partial (p_{inc} + p_s)}{\partial \rho} n_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (p_{inc} + p_s)}{\partial \theta} n_\theta \right) \quad (3.6)$$

avec p_{inc} et p_s donnés respectivement par les équations (3.2) et (3.3),

(ii)

$$t_\rho \mathbf{e}_\rho + t_\theta \mathbf{e}_\theta = (\sigma_{\rho\rho} n_\rho + \sigma_{\rho\theta} n_\theta) \mathbf{e}_\rho + (\sigma_{\rho\theta} n_\rho + \sigma_{\theta\theta} n_\theta) \mathbf{e}_\theta = -(p_{inc} + p_s) (n_\rho \mathbf{e}_\rho + n_\theta \mathbf{e}_\theta) \quad (3.7)$$

respectivement i.e.

$$\sigma_{\rho\rho}n_\rho + \sigma_{\rho\theta}n_\theta = -(p_{inc} + p_s)n_\rho \quad (3.8a)$$

$$\sigma_{\rho\theta}n_\rho + \sigma_{\theta\theta}n_\theta = -(p_{inc} + p_s)n_\theta. \quad (3.8b)$$

Les composantes du tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ sont données dans le chapitre 2 (Eqs. 2.7).

Les conditions aux limites (i) et (ii) peuvent maintenant être exprimées séparément dans chaque représentation irréductible.

3.2.2.1 Représentation A_1

Pour exprimer les conditions aux limites (i) et (ii) données respectivement par les équations (3.6) et (3.8), on doit avoir

(i)

$$\underbrace{\left(-\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)}_{A_1}n_\rho + \underbrace{\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)}_{A_1}n_\theta = \frac{1}{\rho_f\omega^2} \left(\underbrace{\frac{\partial(p_{inc} + p_s)}{\partial\rho}}_{A_1}n_\rho + \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p_{inc} + p_s)}{\partial\theta}}_{A_1}n_\theta \right) \quad (3.9)$$

(ii)

$$\underbrace{\sigma_{\rho\rho}n_\rho}_{A_1} + \underbrace{\sigma_{\rho\theta}n_\theta}_{A_1} = - \underbrace{(p_{inc} + p_s)n_\rho}_{A_1} \quad (3.10a)$$

$$\underbrace{\sigma_{\rho\theta}n_\rho}_{A_2} + \underbrace{\sigma_{\theta\theta}n_\theta}_{A_2} = - \underbrace{(p_{inc} + p_s)n_\theta}_{A_2}. \quad (3.10b)$$

Or, comme cela a été démontré dans le chapitre 1 page 11, n_ρ et n_θ appartiennent respectivement aux représentations irréductibles A_1 et A_2 . D'après la table de multiplication (Tab. 1.2),

- pour la condition aux limites (i)
 - ◇ les termes $-\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial(p_{inc}+p_s)}{\partial\rho}$ appartiennent à A_1 ,
 - ◇ les termes $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi}{\partial\rho}$ et $\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p_{inc}+p_s)}{\partial\theta}$ appartiennent à A_2 ,
- pour la condition aux limites (ii)
 - ◇ les composantes $\sigma_{\rho\rho}$ et $\sigma_{\theta\theta}$ appartiennent à A_1 et $\sigma_{\rho\theta}$ appartient à A_2 , i.e.

$$\sigma_{\rho\rho}^{A_1} = \underbrace{\lambda k_L^2 \phi}_{A_1} - 2\mu \left(\underbrace{\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}}_{A_1} + \underbrace{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}}_{A_1} - \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\partial\theta}}_{A_1} \right), \quad (3.11a)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{A_2} = \sigma_{\theta\rho}^{A_2} = \mu \left(\underbrace{-\frac{2}{\rho}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta\partial\rho}}_{A_2} + \underbrace{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}}_{A_2} + \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}}_{A_2} - \underbrace{\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}}_{A_2} + \underbrace{\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}}_{A_2} \right), \quad (3.11b)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{A_1} = \underbrace{\lambda k_L^2 \phi}_{A_1} + 2\mu \left(\underbrace{-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}}_{A_1} - \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\rho}}_{A_1} - \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}}_{A_1} + \underbrace{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}}_{A_1} \right); \quad (3.11c)$$

- ◇ les pressions incidentes et diffusées appartiennent à A_1 .

On rappelle (Chapitre 1 page 15) que la dérivée par rapport à θ agit comme une multiplication par une fonction appartenant A_2 . D'après la table de multiplication (Tab. 1.2), on en déduit que ϕ , p_s et p_{inc} doivent appartenir à A_1 tandis que ψ doit appartenir à A_2 . Ces quantités sont de la forme (Eqs. 1.15a et 1.15b)

$$\phi^{A_1} = \frac{1}{\rho_s \omega^2} \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n A_n^L J_n(k_L \rho) \cos(n\theta), \quad \psi^{A_2} = \frac{i}{\rho_s \omega^2} \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n A_n^T J_n(k_T \rho) \sin(n\theta) \quad (3.12)$$

$$p_s^{A_1} = \sum_{n \text{ pair}} i^n \gamma_n A_n^S H_n^{(1)}(k\rho) \cos(n\theta), \quad p_{inc}^{A_1} = \sum_{n \text{ pair}} i^n \gamma_n J_n(k\rho) \cos(n\alpha) \cos(n\theta) \quad (3.13)$$

où γ_n est le facteur de Neumann défini par $\gamma_0 = 1$ et $\gamma_n = 2$ pour $n > 0$. En insérant les expressions (Eqs. 3.12 et 3.13) dans les conditions aux limites,

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^{A_1} n_\rho + \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)^{A_2} n_\theta \\ &= \frac{1}{\rho_f \omega^2} \left(\left(\frac{\partial (p_{inc} + p_s)}{\partial \rho} \right)^{A_1} n_\rho + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p_{inc} + p_s)}{\partial \theta} \right)^{A_2} n_\theta \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{A_1} n_\rho + \sigma_{\rho\theta}^{A_2} n_\theta = -(p_{inc} + p_s)^{A_1} n_\rho \quad (3.15a)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{A_2} n_\rho + \sigma_{\theta\theta}^{A_1} n_\theta = -(p_{inc} + p_s)^{A_1} n_\theta, \quad (3.15b)$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n [A_n^L (-a_n^L \cos(n\theta) n_\rho + b_n^L \sin(n\theta) n_\theta) + i A_n^T (-a_n^T \cos(n\theta) n_\rho + b_n^T \sin(n\theta) n_\theta) \\ & + i^n A_n^S (-a_n^S \cos(n\theta) n_\rho + b_n^S \sin(n\theta) n_\theta)] = \sum_{n \text{ pair}} i^n \gamma_n \cos(n\alpha) (-a_n^{inc} \cos(n\theta) n_\rho + b_n^{inc} \sin(n\theta) n_\theta) \end{aligned} \quad (3.16a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n [A_n^L (c_n^L \cos(n\theta) n_\rho + d_n^L \sin(n\theta) n_\theta) + i A_n^T (c_n^T \cos(n\theta) n_\rho + d_n^T \sin(n\theta) n_\theta) \\ & + i^n A_n^S (c_n^S \cos(n\theta) n_\rho)] = \sum_{n \text{ pair}} i^n \gamma_n \cos(n\alpha) (c_n^{inc} \cos(n\theta) n_\rho) \end{aligned} \quad (3.16b)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n [A_n^L (e_n^L \sin(n\theta) n_\rho - f_n^L \cos(n\theta) n_\theta) + i A_n^T (e_n^T \sin(n\theta) n_\rho - f_n^T \cos(n\theta) n_\theta) \\ & + i^n A_n^S (e_n^S \cos(n\theta) n_\theta)] = \sum_{n \text{ pair}} i^n \gamma_n \cos(n\alpha) (e_n^{inc} \cos(n\theta) n_\theta) \end{aligned} \quad (3.16c)$$

où les fonctions de structure $a_n^j, b_n^j, c_n^j, d_n^j, e_n^j, f_n^j$ $j \in \{L, T, S, inc\}$ sont données dans l'annexe A.3. Ces fonctions dépendent de la variable θ et s'expriment à partir des fonctions de Bessel et de leurs dérivées. Afin de s'affranchir de la dépendance angulaire en θ , les fonctions $F_n(\theta)$ entre parenthèses dans les équations (3.16) sont développées en séries de Fourier de la façon suivante

$$F_n(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_{n,p} e^{ip\theta}, \quad \text{avec } f_{n,p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\theta) e^{-ip\theta} d\theta. \quad (3.17)$$

Le système d'équations (3.16) s'écrit alors

$$\sum_{n \text{ pair}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \gamma_n \left(A_n^L \alpha_{n,p}^L + i A_n^T \alpha_{n,p}^T + i^n A_n^S \alpha_{n,p}^S \right) e^{ip\theta} = \sum_{n \text{ pair}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \gamma_n \left(i^n \cos(n\alpha) \alpha_{n,p}^{inc} \right) e^{ip\theta} \quad (3.18a)$$

$$\sum_{n \text{ pair}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \gamma_n \left(A_n^L \beta_{n,p}^L + i A_n^T \beta_{n,p}^T + i^n A_n^S \beta_{n,p}^S \right) e^{ip\theta} = \sum_{n \text{ pair}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \gamma_n \left(i^n \cos(n\alpha) \beta_{n,p}^{inc} \right) e^{ip\theta} \quad (3.18b)$$

$$\sum_{n \text{ pair}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \gamma_n \left(A_n^L \tilde{\alpha}_{n,p}^L + i A_n^T \tilde{\alpha}_{n,p}^T + i^n A_n^S \tilde{\alpha}_{n,p}^S \right) e^{ip\theta} = \sum_{n \text{ pair}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \gamma_n \left(i^n \cos(n\alpha) \tilde{\alpha}_{n,p}^{inc} \right) e^{ip\theta} \quad (3.18c)$$

où l'on a posé

$$(-a_n^L \cos(n\theta) n_\rho + b_n^L \sin(n\theta) n_\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n,p}^L e^{ip\theta}$$

$$\text{avec } \alpha_{n,p}^L = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-a_n^L \cos(n\theta) n_\rho + b_n^L \sin(n\theta) n_\theta) e^{-ip\theta} d\theta, \quad (3.19a)$$

$$(-a_n^T \cos(n\theta) n_\rho + b_n^T \sin(n\theta) n_\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n,p}^T e^{ip\theta}$$

$$\text{avec } \alpha_{n,p}^T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-a_n^T \cos(n\theta) n_\rho + b_n^T \sin(n\theta) n_\theta) e^{-ip\theta} d\theta, \quad (3.19b)$$

$$(-a_n^S \cos(n\theta) n_\rho + b_n^S \sin(n\theta) n_\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n,p}^S e^{ip\theta}$$

$$\text{avec } \alpha_{n,p}^S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-a_n^S \cos(n\theta) n_\rho + b_n^S \sin(n\theta) n_\theta) e^{-ip\theta} d\theta, \quad (3.19c)$$

$$(-a_n^{inc} \cos(n\theta) n_\rho + b_n^{inc} \sin(n\theta) n_\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n,p}^{inc} e^{ip\theta}$$

$$\text{avec } \alpha_{n,p}^{inc} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-a_n^{inc} \cos(n\theta) n_\rho + b_n^{inc} \sin(n\theta) n_\theta) e^{-ip\theta} d\theta, \quad (3.19d)$$

$$(c_n^L \cos(n\theta) n_\rho + d_n^L \sin(n\theta) n_\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_{n,p}^L e^{ip\theta}$$

$$\text{avec } \beta_{n,p}^L = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (c_n^L \cos(n\theta) n_\rho + d_n^L \sin(n\theta) n_\theta) e^{-ip\theta} d\theta, \quad (3.20a)$$

$$(c_n^T \cos(n\theta) n_\rho + d_n^T \sin(n\theta) n_\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_{n,p}^T e^{ip\theta}$$

$$\text{avec } \beta_{n,p}^T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (c_n^T \cos(n\theta) n_\rho + d_n^T \sin(n\theta) n_\theta) e^{-ip\theta} d\theta, \quad (3.20b)$$

$$(c_n^S \cos(n\theta) n_\rho) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_{n,p}^S e^{ip\theta} \quad \text{avec } \beta_{n,p}^S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (c_n^S \cos(n\theta) n_\rho) e^{-ip\theta} d\theta, \quad (3.20c)$$

$$(c_n^{inc} \cos(n\theta) n_\rho) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_{n,p}^{inc} e^{ip\theta} \quad \text{avec } \beta_{n,p}^{inc} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (c_n^{inc} \cos(n\theta) n_\rho) e^{-ip\theta} d\theta, \quad (3.20d)$$

$$(e_n^L \sin(n\theta) n_\rho - f_n^L \cos(n\theta) n_\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \xi_{n,p}^L e^{ip\theta}$$

$$\text{avec } \xi_{n,p}^L = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e_n^L \sin(n\theta) n_\rho - f_n^L \cos(n\theta) n_\theta) e^{-ip\theta} d\theta, \quad (3.21a)$$

$$(e_n^T \sin(n\theta) n_\rho - f_n^T \cos(n\theta) n_\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \xi_{n,p}^T e^{ip\theta}$$

$$\text{avec } \xi_{n,p}^T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e_n^T \sin(n\theta) n_\rho - f_n^T \cos(n\theta) n_\theta) e^{-ip\theta} d\theta, \quad (3.21b)$$

$$(e_n^S \cos(n\theta) n_\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \xi_{n,p}^S e^{ip\theta} \quad \text{avec } \xi_{n,p}^S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e_n^S \cos(n\theta) n_\theta) e^{-ip\theta} d\theta, \quad (3.21c)$$

$$(e_n^{inc} \cos(n\theta) n_\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \xi_{n,p}^{inc} e^{ip\theta} \quad \text{avec } \xi_{n,p}^{inc} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e_n^{inc} \cos(n\theta) n_\theta) e^{-ip\theta} d\theta. \quad (3.21d)$$

L'utilisation de la théorie des groupes confère des propriétés de parité aux fonctions entre parenthèses dans (3.16) ou (3.19), (3.20) et (3.21). En suivant la démarche décrite dans l'annexe A.4 qui utilise les propriétés de parité et d'invariance de ces fonctions, on peut réduire

- la somme sur p de $]-\infty, +\infty[$ à $[0, +\infty[$,
- le domaine d'intégration $[-\pi, \pi]$ à $[0, \pi/2]$, i.e. l'étude est restreinte au domaine fondamental (Fig. 3.1).

Les équations (3.19), (3.20) et (3.21) correspondent à l'équation (A.16). Les fonctions $F_n(\theta)$ dans les équations (3.19) et (3.20) sont paires et invariantes par changement $\theta \rightarrow \pi - \theta$ et on applique dans ce cas le résultat (Eq. A.22). Les fonctions $F_n(\theta)$ dans les équations (3.21) sont impaires et non invariantes par changement $\theta \rightarrow \pi - \theta$ et on applique dans ce cas le résultat (Eq. A.28). On obtient alors les équations finales

$$\sum_{n,p \text{ pairs}} \gamma_n \gamma_p \left(A_n^L \alpha_{n,p}^L + i A_n^T \alpha_{n,p}^T + i^n A_n^S \alpha_{n,p}^S \right) \cos(p\theta) = \sum_{n,p \text{ pairs}} \gamma_n \gamma_p \left(i^n \cos(n\alpha) \alpha_{n,p}^{inc} \right) \cos(p\theta) \quad (3.22a)$$

$$\sum_{n,p \text{ pairs}} \gamma_n \gamma_p \left(A_n^L \beta_{n,p}^L + i A_n^T \beta_{n,p}^T + i^n A_n^S \beta_{n,p}^S \right) \cos(p\theta) = \sum_{n,p \text{ pairs}} \gamma_n \gamma_p \left(i^n \cos(n\alpha) \beta_{n,p}^{inc} \right) \cos(p\theta) \quad (3.22b)$$

$$\sum_{n,p \text{ pairs}} \gamma_n \gamma_p \left(A_n^L \xi_{n,p}^L + i A_n^T \xi_{n,p}^T + i^n A_n^S \xi_{n,p}^S \right) \sin(p\theta) = \sum_{n,p \text{ pairs}} \gamma_n \gamma_p \left(i^n \cos(n\alpha) \xi_{n,p}^{inc} \right) \sin(p\theta) \quad (3.22c)$$

où les coefficients de Fourier $\alpha_{n,p}^{(j)}, \beta_{n,p}^{(j)}, \xi_{n,p}^{(j)}, j \in \{L, T, S, inc\}$ sont donnés dans l'annexe A.6. On note que la théorie des groupes permet de réduire les sommes à des entiers pairs positifs.

Forme matricielle Le système d'équations (3.22) peut s'exprimer sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \gamma_n \gamma_p \alpha_{n,p}^L & i \gamma_n \gamma_p \alpha_{n,p}^T & i^n \gamma_n \gamma_p \alpha_{n,p}^S \\ \gamma_n \gamma_p \beta_{n,p}^L & i \gamma_n \gamma_p \beta_{n,p}^T & i^n \gamma_n \gamma_p \beta_{n,p}^S \\ \gamma_n \gamma_p \xi_{n,p}^L & i \gamma_n \gamma_p \xi_{n,p}^T & i^n \gamma_n \gamma_p \xi_{n,p}^S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^L \\ A_n^T \\ A_n^S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^n \gamma_n \gamma_p \alpha_{n,p}^{inc} \cos(n\alpha) \\ i^n \gamma_n \gamma_p \beta_{n,p}^{inc} \cos(n\alpha) \\ i^n \gamma_n \gamma_p \xi_{n,p}^{inc} \cos(n\alpha) \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

On procède d'une manière similaire pour obtenir, *mutatis mutandis*, les équations finales pour les représentations A_2, B_1 et B_2 .

3.2.2.2 Représentation A_2

On exprime les conditions aux limites dans la représentation irréductible A_2 en utilisant

$$\phi^{A_2} = \frac{i}{\rho_s \omega^2} \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n A_n^L J_n(k_L \rho) \sin(n\theta), \quad \psi^{A_1} = \frac{1}{\rho_s \omega^2} \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n A_n^T J_n(k_T \rho) \cos(n\theta) \quad (3.24)$$

$$p_s^{A_2} = i \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n i^n A_n^S H_n^{(1)}(k\rho) \sin(n\theta), \quad p_{inc}^{A_2} = \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n i^n J_n(k\rho) \sin(n\alpha) \sin(n\theta) \quad (3.25)$$

de la forme (Eqs. 1.15a et 1.15b). On obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n [A_n^L (a_n^L \sin(n\theta) n_\rho + b_n^L \cos(n\theta) n_\theta) + i A_n^T (a_n^T \sin(n\theta) n_\rho + b_n^T \cos(n\theta) n_\theta) \\ + i^n A_n^S (a_n^S \sin(n\theta) n_\rho + b_n^S \cos(n\theta) n_\theta)] = -i \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n \times i^n \sin(n\alpha) (a_n^{inc} \sin(n\theta) n_\rho + b_n^{inc} \cos(n\theta) n_\theta) \end{aligned} \quad (3.26a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n [A_n^L (c_n^L \sin(n\theta) n_\rho - d_n^L \cos(n\theta) n_\theta) + i A_n^T (c_n^T \sin(n\theta) n_\rho - d_n^T \cos(n\theta) n_\theta) \\ + i^n A_n^S (c_n^S \sin(n\theta) n_\rho)] = -i \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n \times i^n \sin(n\alpha) (c_n^{inc} \sin(n\theta) n_\rho) \end{aligned} \quad (3.26b)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n [A_n^L (e_n^L \cos(n\theta) n_\rho + f_n^L \sin(n\theta) n_\theta) + i A_n^T (e_n^T \cos(n\theta) n_\rho + f_n^T \sin(n\theta) n_\theta) \\ - i^n A_n^S (e_n^S \sin(n\theta) n_\theta)] = i \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n \times i^n \sin(n\alpha) (e_n^{inc} \sin(n\theta) n_\theta) \end{aligned} \quad (3.26c)$$

où les fonctions de structure $a_n^j, b_n^j, c_n^j, d_n^j, e_n^j, f_n^j$ $j \in \{L, T, S, inc\}$ sont données dans l'annexe A.3. La décomposition en série de Fourier, la réduction de la somme sur p et la restriction au domaine fondamental (Annexe A.4, résultats (Eqs. A.28 et A.22)) dans le système d'équations (3.26) conduisent aux équations finales

$$\sum_{n,p \text{ pairs}} \gamma_n \gamma_p \left(A_n^L \kappa_{n,p}^L + i A_n^T \kappa_{n,p}^T + i^n A_n^S \kappa_{n,p}^S \right) \sin(p\theta) = -i \sum_{n,p \text{ pairs}} \gamma_n \gamma_p \left(i^n \sin(n\alpha) \kappa_{n,p}^{inc} \right) \sin(p\theta) \quad (3.27a)$$

$$\sum_{n,p \text{ pairs}} \gamma_n \gamma_p \left(A_n^L \eta_{n,p}^L + i A_n^T \eta_{n,p}^T + i^n A_n^S \eta_{n,p}^S \right) \sin(p\theta) = -i \sum_{n,p \text{ pairs}} \gamma_n \gamma_p \left(i^n \sin(n\alpha) \eta_{n,p}^{inc} \right) \sin(p\theta) \quad (3.27b)$$

$$\sum_{n,p \text{ pairs}} \gamma_n \gamma_p \left(A_n^L \zeta_{n,p}^L + i A_n^T \zeta_{n,p}^T - i^n A_n^S \zeta_{n,p}^S \right) \cos(p\theta) = i \sum_{n,p \text{ pairs}} \gamma_n \gamma_p \left(i^n \sin(n\alpha) \zeta_{n,p}^{inc} \right) \cos(p\theta) \quad (3.27c)$$

où les coefficients de Fourier $\kappa_{n,p}^{(j)}, \eta_{n,p}^{(j)}, \zeta_{n,p}^{(j)}$ $j \in \{L, T, S, inc\}$ sont donnés dans l'annexe A.6.

Forme matricielle Le système d'équations (3.27) peut s'exprimer sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \gamma_n \gamma_p \kappa_{n,p}^L & i \gamma_n \gamma_p \kappa_{n,p}^T & i^n \gamma_n \gamma_p \kappa_{n,p}^S \\ \gamma_n \gamma_p \eta_{n,p}^L & i \gamma_n \gamma_p \eta_{n,p}^T & i^n \gamma_n \gamma_p \eta_{n,p}^S \\ \gamma_n \gamma_p \zeta_{n,p}^L & i \gamma_n \gamma_p \zeta_{n,p}^T & -i^n \gamma_n \gamma_p \zeta_{n,p}^S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^L \\ A_n^T \\ A_n^S \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} i^n \gamma_n \gamma_p \kappa_{n,p}^{inc} \sin(n\alpha) \\ i^n \gamma_n \gamma_p \eta_{n,p}^{inc} \sin(n\alpha) \\ -i^n \gamma_n \gamma_p \zeta_{n,p}^{inc} \sin(n\alpha) \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

3.2.2.3 Représentation B_1

On exprime les conditions aux limites dans la représentation irréductible B_1 en utilisant

$$\phi^{B_1} = \frac{2}{\rho_s \omega^2} \sum_{n \text{ impair}} A_n^L J_n(k_L \rho) \cos(n\theta), \quad \psi^{B_2} = \frac{2i}{\rho_s \omega^2} \sum_{n \text{ impair}} A_n^T J_n(k_T \rho) \sin(n\theta) \quad (3.29)$$

$$p_s^{B_1} = 2 \sum_{n \text{ impair}} i^n A_n^S H_n^{(1)}(k\rho) \cos(n\theta), \quad p_{inc}^{B_1} = 2 \sum_{n \text{ impair}} i^n J_n(k\rho) \cos(n\alpha) \cos n\theta \quad (3.30)$$

de la forme (Eqs. 1.15c et 1.15d). On obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \text{ impair}} [A_n^L (-a_n^L \cos(n\theta) n_\rho + b_n^L \sin(n\theta) n_\theta) + i A_n^T (-a_n^T \cos(n\theta) n_\rho + b_n^T \sin(n\theta) n_\theta) \\ + i^n A_n^S (-a_n^S \cos(n\theta) n_\rho + b_n^S \sin(n\theta) n_\theta)] = \sum_{n \text{ impair}} i^n \cos(n\alpha) (-a_n^{inc} \cos(n\theta) n_\rho + b_n^{inc} \sin(n\theta) n_\theta) \end{aligned} \quad (3.31a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \text{ impair}} [A_n^L (c_n^L \cos(n\theta) n_\rho + d_n^L \sin(n\theta) n_\theta) + i A_n^T (c_n^T \cos(n\theta) n_\rho + d_n^T \sin(n\theta) n_\theta) \\ + i^n A_n^S (c_n^S \cos(n\theta) n_\rho)] = \sum_{n \text{ impair}} i^n \cos(n\alpha) (c_n^{inc} \cos(n\theta) n_\rho) \end{aligned} \quad (3.31b)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \text{ impair}} [A_n^L (e_n^L \sin(n\theta) n_\rho - f_n^L \cos(n\theta) n_\theta) + i A_n^T (e_n^T \sin(n\theta) n_\rho - f_n^T \cos(n\theta) n_\theta) \\ + i^n A_n^S (e_n^S \cos(n\theta) n_\theta)] = \sum_{n \text{ impair}} i^n \cos(n\alpha) (e_n^{inc} \cos(n\theta) n_\theta) \end{aligned} \quad (3.31c)$$

où les fonctions de structure $a_n^j, b_n^j, c_n^j, d_n^j, e_n^j, f_n^j, j \in \{L, T, S, inc\}$ sont données dans l'annexe A.3. La décomposition en série de Fourier, la réduction de la somme sur p et la restriction au domaine fondamental (Annexe A.4, résultats (Eqs. A.24 et A.27)) dans le système d'équations (3.31) conduisent aux équations finales

$$\sum_{n,p \text{ impairs}} (A_n^L \alpha_{n,p}^L + i A_n^T \alpha_{n,p}^T + i^n A_n^S \alpha_{n,p}^S) \cos(p\theta) = \sum_{n,p \text{ impairs}} (i^n \cos(n\alpha) \alpha_{n,p}^{inc}) \cos(p\theta) \quad (3.32a)$$

$$\sum_{n,p \text{ impairs}} (A_n^L \beta_{n,p}^L + i A_n^T \beta_{n,p}^T + i^n A_n^S \beta_{n,p}^S) \cos(p\theta) = \sum_{n,p \text{ impairs}} (i^n \cos(n\alpha) \beta_{n,p}^{inc}) \cos(p\theta) \quad (3.32b)$$

$$\sum_{n,p \text{ impairs}} (A_n^L \zeta_{n,p}^L + i A_n^T \zeta_{n,p}^T + i^n A_n^S \zeta_{n,p}^S) \sin(p\theta) = \sum_{n,p \text{ impairs}} (i^n \cos(n\alpha) \zeta_{n,p}^{inc}) \sin(p\theta) \quad (3.32c)$$

où les coefficients de Fourier $\alpha_{n,p}^{(j)}, \beta_{n,p}^{(j)}, \zeta_{n,p}^{(j)}, j \in \{L, T, S, inc\}$ sont donnés dans l'annexe A.6.

Forme matricielle Le système d'équations (3.32) peut s'exprimer sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n,p}^L & i\alpha_{n,p}^T & i^n \alpha_{n,p}^S \\ \beta_{n,p}^L & i\beta_{n,p}^T & i^n \beta_{n,p}^S \\ \zeta_{n,p}^L & i\zeta_{n,p}^T & i^n \zeta_{n,p}^S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^L \\ A_n^T \\ A_n^S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^n \alpha_{n,p}^{inc} \cos(n\alpha) \\ i^n \beta_{n,p}^{inc} \cos(n\alpha) \\ i^n \zeta_{n,p}^{inc} \cos(n\alpha) \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

3.2.2.4 Représentation B_2

On exprime les conditions aux limites dans la représentation irréductible B_2 en utilisant

$$\phi^{B_2} = \frac{2i}{\rho_s \omega^2} \sum_{n \text{ impair}} A_n^L J_n(k_L \rho) \sin(n\theta), \quad \psi^{B_1} = \frac{2}{\rho_s \omega^2} \sum_{n \text{ impair}} A_n^T J_n(k_T \rho) \cos(n\theta) \quad (3.34)$$

$$p_s^{B_2} = 2i \sum_{n \text{ impair}} i^n A_n^S H_n^{(1)}(k\rho) \sin(n\theta), \quad p_{inc}^{B_2} = 2 \sum_{n \text{ impair}} i^n J_n(k\rho) \sin(n\alpha) \sin(n\theta) \quad (3.35)$$

de la forme (Eqs. 1.15c) et (1.15d). On obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \text{ impair}} [A_n^L (a_n^L \sin(n\theta) n_\rho + b_n^L \cos(n\theta) n_\theta) + i A_n^T (a_n^T \sin(n\theta) n_\rho + b_n^T \cos(n\theta) n_\theta) \\ + i^n A_n^S (a_n^S \sin(n\theta) n_\rho + b_n^S \cos(n\theta) n_\theta)] = -i \sum_{n \text{ impair}} i^n \sin(n\alpha) (a_n^{inc} \sin(n\theta) n_\rho + b_n^{inc} \cos(n\theta) n_\theta) \end{aligned} \quad (3.36a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \text{ impair}} [A_n^L (c_n^L \sin(n\theta) n_\rho - d_n^L \cos(n\theta) n_\theta) + i A_n^T (c_n^T \sin(n\theta) n_\rho - d_n^T \cos(n\theta) n_\theta) \\ + i^n A_n^S (c_n^S \sin(n\theta) n_\rho)] = -i \sum_{n \text{ impair}} i^n \sin(n\alpha) (c_n^{inc} \sin(n\theta) n_\rho) \end{aligned} \quad (3.36b)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \text{ impair}} [A_n^L (e_n^L \cos(n\theta) n_\rho + f_n^L \sin(n\theta) n_\theta) + i A_n^T (e_n^T \cos(n\theta) n_\rho + f_n^T \sin(n\theta) n_\theta) \\ - i^n A_n^S (e_n^S \sin(n\theta) n_\theta)] = i \sum_{n \text{ impair}} i^n \sin(n\alpha) (e_n^{inc} \sin(n\theta) n_\theta) \end{aligned} \quad (3.36c)$$

où les fonctions de structure $a_n^j, b_n^j, c_n^j, d_n^j, e_n^j, f_n^j$ $j \in \{L, T, S, inc\}$ sont données dans l'annexe A.3. La décomposition en série de Fourier, la réduction de la somme sur p et la restriction au domaine fondamental (Annexe A.4, résultats (Eqs. A.27 et A.24)) dans le système d'équations (3.36) conduisent aux équations finales

$$\sum_{n,p \text{ impairs}} \left(A_n^L \kappa_{n,p}^L + i A_n^T \kappa_{n,p}^T + i^n A_n^S \kappa_{n,p}^S \right) \sin(p\theta) = -i \sum_{n,p \text{ impairs}} \left(i^n \sin(n\alpha) \kappa_{n,p}^{inc} \right) \sin(p\theta) \quad (3.37a)$$

$$\sum_{n,p \text{ impairs}} \left(A_n^L \eta_{n,p}^L + i A_n^T \eta_{n,p}^T + i^n A_n^S \eta_{n,p}^S \right) \sin(p\theta) = -i \sum_{n,p \text{ impairs}} \left(i^n \sin(n\alpha) \eta_{n,p}^{inc} \right) \sin(p\theta) \quad (3.37b)$$

$$\sum_{n,p \text{ impairs}} \left(A_n^L \zeta_{n,p}^L + i A_n^T \zeta_{n,p}^T - i^n A_n^S \zeta_{n,p}^S \right) \cos(p\theta) = i \sum_{n,p \text{ impairs}} \left(i^n \sin(n\alpha) \zeta_{n,p}^{inc} \right) \cos(p\theta) \quad (3.37c)$$

où les coefficients de Fourier $\kappa_{n,p}^{(j)}, \eta_{n,p}^{(j)}, \zeta_{n,p}^{(j)}$ $j \in \{L, T, S, inc\}$ sont donnés dans l'annexe A.6.

Forme matricielle Le système d'équations (3.37) peut s'exprimer sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \kappa_{n,p}^L & i\kappa_{n,p}^T & i^n \kappa_{n,p}^S \\ \eta_{n,p}^L & i\eta_{n,p}^T & i^n \eta_{n,p}^S \\ \zeta_{n,p}^L & i\zeta_{n,p}^T & -i^n \zeta_{n,p}^S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^L \\ A_n^T \\ A_n^S \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} i^n \kappa_{n,p}^{inc} \sin(n\alpha) \\ i^n \eta_{n,p}^{inc} \sin(n\alpha) \\ -i^n \zeta_{n,p}^{inc} \sin(n\alpha) \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

3.2.3 Détermination des quantités physiques

La diffusion acoustique d'une onde plane par un cylindre elliptique infini se ramène à la résolution des équations (3.22), (3.27), (3.32) et (3.37), qui constituent un ensemble de systèmes infinis d'équations algébriques linéaires et complexes. Chaque système est associé à une représentation irréductible donnée du groupe de symétrie \mathcal{C}_{2v} . Les coefficients de diffusion inconnus sont découplés grâce aux considérations de symétrie, ce qui simplifie considérablement le problème. Le système d'équations peut être résolu numériquement en le tronquant et utilisé pour obtenir : i) les résonances, ii) le déplacement élastique, iii) la pression diffusée, et iv) la fonction de forme en champ lointain.

La détermination de ces quantités physiques, à l'exception des résonances, nécessite l'évaluation des coefficients inconnus A_n^L, A_n^T, A_n^S pour chaque représentation irréductible. Ces coefficients sont obtenus en résolvant les systèmes linéaires complexes tronqués (Eqs. 3.22, 3.27, 3.32, 3.37). Les résonances sont obtenues en résolvant le problème propre.

Les considérations numériques pour déterminer les quantités physiques sont développées plus loin dans le paragraphe 3.2.4.1.

3.2.3.1 Les résonances

Les résonances sont déterminées en résolvant l'équation caractéristique dans chaque représentation irréductible $R_i = \{A_1, A_2, B_1, B_2\}$

$$\det M^{R_i} = 0, \quad (3.39)$$

où M^{R_i} est la matrice qui apparaît dans le membre de gauche des équations (3.23), (3.28), (3.33) et (3.38). Les résonances sont alors naturellement classées selon les 4 représentations.

3.2.3.2 Le déplacement élastique

Le déplacement élastique (Eq. 3.4) peut être exprimé dans chaque représentation irréductible R_i en utilisant les décompositions vectorielles (Eqs. 1.22) et les potentiels (Eqs. 3.12, 3.24, 3.29 et 3.34). En suivant la démarche décrite pour le déplacement élastique du chapitre 2 (Sous-section 2.2.3), on obtient alors

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{A_1} = \frac{1}{\rho_s \omega^2} \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n \left[\left(-k_L A_n^L J_n'(k_L \rho) + i \frac{n}{\rho} A_n^T J_n(k_T \rho) \right) \cos(n\theta) \mathbf{e}_\rho \right. \\ \left. + \left(-ik_T A_n^T J_n'(k_T \rho) + \frac{n}{\rho} A_n^L J_n(k_L \rho) \right) \sin(n\theta) \mathbf{e}_\theta \right], \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{A_2} = \frac{1}{\rho_s \omega^2} \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n \left[\left(-ik_L A_n^L J_n'(k_L \rho) - \frac{n}{\rho} A_n^T J_n(k_T \rho) \right) \sin(n\theta) \mathbf{e}_\rho \right. \\ \left. + \left(-k_T A_n^T J_n'(k_T \rho) - i \frac{n}{\rho} A_n^L J_n(k_L \rho) \right) \cos(n\theta) \mathbf{e}_\theta \right], \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{B_1} = \frac{2}{\rho_s \omega^2} \sum_{n \text{ impair}} \left[\left(-k_L A_n^L J_n'(k_L \rho) + i \frac{n}{\rho} A_n^T J_n(k_T \rho) \right) \cos(n\theta) \mathbf{e}_\rho \right. \\ \left. + \left(-ik_T A_n^T J_n'(k_T \rho) + \frac{n}{\rho} A_n^L J_n(k_L \rho) \right) \sin(n\theta) \mathbf{e}_\theta \right], \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{u}^{B_2} = \frac{2}{\rho_s \omega^2} \sum_{n \text{ impair}} \left[\left(-ik_L A_n^L J_n'(k_L \rho) - \frac{n}{\rho} A_n^T J_n(k_T \rho) \right) \sin(n\theta) \mathbf{e}_\rho + \left(-k_T A_n^T J_n'(k_T \rho) - i \frac{n}{\rho} A_n^L J_n(k_L \rho) \right) \cos(n\theta) \mathbf{e}_\theta \right]. \quad (3.43)$$

L'amplitude du déplacement des modes résonants est obtenue en calculant $|\mathbf{u}^{R_i}|$.

3.2.3.3 La pression diffusée et la fonction de forme en champ lointain

La pression diffusée (Eq. 3.3) peut être exprimée dans chaque représentation irréductible R_i en utilisant l'expression de $p_s^{R_i}$ donnée par les équations (3.13), (3.25), (3.30) et (3.35).

La fonction de forme FF_∞ est définie de la façon suivante [Léon et al. 2004] :

$$FF_\infty = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{a_{\text{eff}}}{a}} \sqrt{\frac{2\rho}{a}} \left| \frac{p_s}{p_{\text{inc}}} \right|, \quad (3.44)$$

avec $a_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ et $p_s = p_s^{A_1} + p_s^{A_2} + p_s^{B_1} + p_s^{B_2}$ obtenu à partir de la décomposition scalaire (Eq. 1.10). De façon équivalente, en prenant la limite de chaque composante de la pression diffusée, on obtient

$$FF_\infty = |FF_\infty^{A_1} + FF_\infty^{A_2} + FF_\infty^{B_1} + FF_\infty^{B_2}|, \quad (3.45)$$

avec

$$FF_\infty^{A_1} = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{a_{\text{eff}}}{\pi k}} e^{-i\pi/4} \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n A_n^S \cos(n\theta), \quad (3.46a)$$

$$FF_\infty^{A_2} = \frac{2i}{a} \sqrt{\frac{a_{\text{eff}}}{\pi k}} e^{-i\pi/4} \sum_{n \text{ pair}} \gamma_n A_n^S \sin(n\theta), \quad (3.46b)$$

$$FF_\infty^{B_1} = \frac{4i}{a} \sqrt{\frac{a_{\text{eff}}}{\pi k}} e^{-3i\pi/4} \sum_{n \text{ impair}} A_n^S \cos(n\theta), \quad (3.46c)$$

$$FF_\infty^{B_2} = -\frac{4}{a} \sqrt{\frac{a_{\text{eff}}}{\pi k}} e^{-3i\pi/4} \sum_{n \text{ impair}} A_n^S \sin(n\theta). \quad (3.46d)$$

Les coefficients inconnus A_n^S sont bien évidemment distincts pour chaque représentation.

3.2.4 Résultats numériques

3.2.4.1 Considérations numériques

On rappelle que l'utilisation de la théorie des groupes conduit au découplage du problème de diffusion, c'est à dire que les équations obtenues peuvent être résolues séparément pour chaque représentation irréductible. Les résonances sont déterminées en résolvant l'équation caractéristique $\det M^{R_i} = 0$ (Eq. 3.39), où M^{R_i} est la matrice qui apparaît dans le membre de gauche des équations (3.23), (3.28), (3.33) et (3.38). Comme cela a été expliqué dans la sous-section 2.3.1 du chapitre 2, les résonances du problème de diffusion sont complexes et il est nécessaire de rechercher les zéros de l'équation caractéristique en utilisant le *principe de l'argument* [Whittaker et Watson 1927]. Cette méthode permet de déterminer les positions des résonances de diffusion dans le plan complexe de la variable kr , où k est le nombre d'onde et r le rayon moyen calculé pour un périmètre d'ellipse constant égal à 2π . L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d}{dkr} \ln(\det M^{R_i}) dkr \quad (3.47)$$

le long du contour fermé C^1 fournit la différence entre le nombre de zéros de $\det M^{R_i}$ (comptés avec leur multiplicité) et le nombre de ses pôles (comptés également avec leur multiplicité), ces pôles et zéros étant situés à l'intérieur de C . On effectue une exploration du plan complexe de la variable kr afin d'isoler tous les zéros. On remarque qu'un tel procédé est d'autant plus performant que notre étude algébrique permet de diviser par 4 le nombre de résonances dans le domaine du plan complexe exploré, 4 étant le nombre de représentations irréductibles du groupe C_{2v} . Ensuite, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C kr \frac{d}{dkr} \ln(\det M^{R_i}) dkr \quad (3.48)$$

nous permet de calculer les coordonnées des zéros isolés dans la région intérieure à C . Les positions des résonances de diffusion sont déterminées dans le domaine $0 \leq \operatorname{Re}(kr) \leq 50$ et $-0,5 \leq \operatorname{Im}(kr) \leq 0^2$. Pour des fréquences réduites plus élevées, la détermination des résonances engendre des instabilités numériques.

Les matrices par blocs qui interviennent dans les calculs sont de dimension infinie. Pour obtenir une solution numérique, elle doivent être tronquées. La démarche pour déterminer numériquement l'ordre de troncature N est la même que celle suivie en sous-section 2.3.1. Il dépend du produit $k \times a$ (où k est le nombre d'onde réduit et a est le demi-grand axe du disque elliptique) et est donné par

$$N = \operatorname{Sup} \left(8, \frac{ka}{4} + 4 \right), \quad (3.49)$$

qui est identique à celui du problème intérieur (Eq. 2.41). Cependant, on doit y ajouter une correction dépendant de l'excentricité pour $b/a < 0,9$:

$$N = \operatorname{Sup} \left(8, \frac{ka}{4} + 4 + \frac{2}{u} \right) \quad (3.50)$$

avec u la coordonnée elliptique radiale définie en annexe A.1.

Les coefficients inconnus sont déterminés numériquement en résolvant, dans chaque représentation irréductible, les systèmes d'équations (3.22), (3.27), (3.32) et (3.37) tronqués afin de calculer le déplacement élastique, la pression diffusée et la fonction de forme en champ lointain.

L'implémentation numérique de notre méthode, qui prend en compte les symétries grâce à la théorie des groupes, présente de nombreux avantages, déjà mentionnés en sous-section 2.3.1. On rappelle que les matrices sont de dimension $(N \times N)$, plutôt que $(2N \times 2N)$ pour le problème couplé (*i.e.* sans utilisation de la théorie des groupes). Elles sont mieux conditionnées et leur taille réduite accélère la vitesse des calculs. D'autre part, les calculs peuvent être menés en haute fréquence ($\operatorname{Re}(kr) = 50$) et pour de fortes excentricités.

3.2.4.2 Mise en évidence de la levée de dégénérescence

On s'intéresse à la levée de dégénérescence des résonances qui peut être interprétée en termes de brisure de symétrie. La symétrie du cylindre circulaire est brisée en considérant différents cylindres elliptiques de rapports b/a décroissants. Les résonances du cylindre circulaire sont associées aux modes résonants (n, ℓ) dans le formalisme modal usuel. Elles sont suivies à mesure qu'on le déforme vers un cylindre elliptique de plus en plus excentré, tout en conservant un périmètre constant égal à 2π , dans le but de conserver la même

1. On choisit un contour d'intégration circulaire.

2. Sur les figures, on présente un domaine limité à $\operatorname{Re}(kr) = 50$ et $\operatorname{Im}(kr) = -0,2$. Pour des parties imaginaires inférieures, les résonances sont très atténuées et leur contribution est réduite.

longueur de parcours pour toute onde circonférentielle, quel que soit le rapport b/a . Sur les figures (3.2) et (3.3), on suit l'évolution de deux modes résonants du cylindre circulaire à mesure que l'excentricité augmente. Les modes $(1,2)$ et $(3,2)$ sont respectivement suivis sur des fonctions de forme (Fig. 3.2a), obtenues numériquement, et dans le plan complexe de la variable kr (Fig. 3.3a). La levée de dégénérescence s'opère (ici en B_1 et B_2) dès que la symétrie est à peine brisée ($b/a = 0,9640$), et on constate logiquement que la séparation augmente avec l'excentricité. On suit l'évolution des modes $(1,2)^{B_1} - (1,2)^{B_2}$ et $(3,2)^{B_1} - (3,2)^{B_2}$ en traçant, dans les représentations B_1 et B_2 , le déplacement élastique et la pression diffusée normalisée par la pression incidente. On note en particulier que les deux modes *séparés* se comportent très différemment à mesure que la déformation augmente en observant les lobes de ré-émission de la pression diffusée. Le suivi dans le plan complexe montre que les résonances se séparent à la fois en partie réelle et en partie imaginaire. La position des minima sur la fonction de forme correspond à la partie réelle, l'allure du minima (plus ou moins large) correspond à la partie imaginaire qui est liée à l'atténuation. C'est pourquoi les résonances dont la partie imaginaire augmente (en valeur absolue) sont de plus en plus atténuées et non observables sur des fonctions de forme.

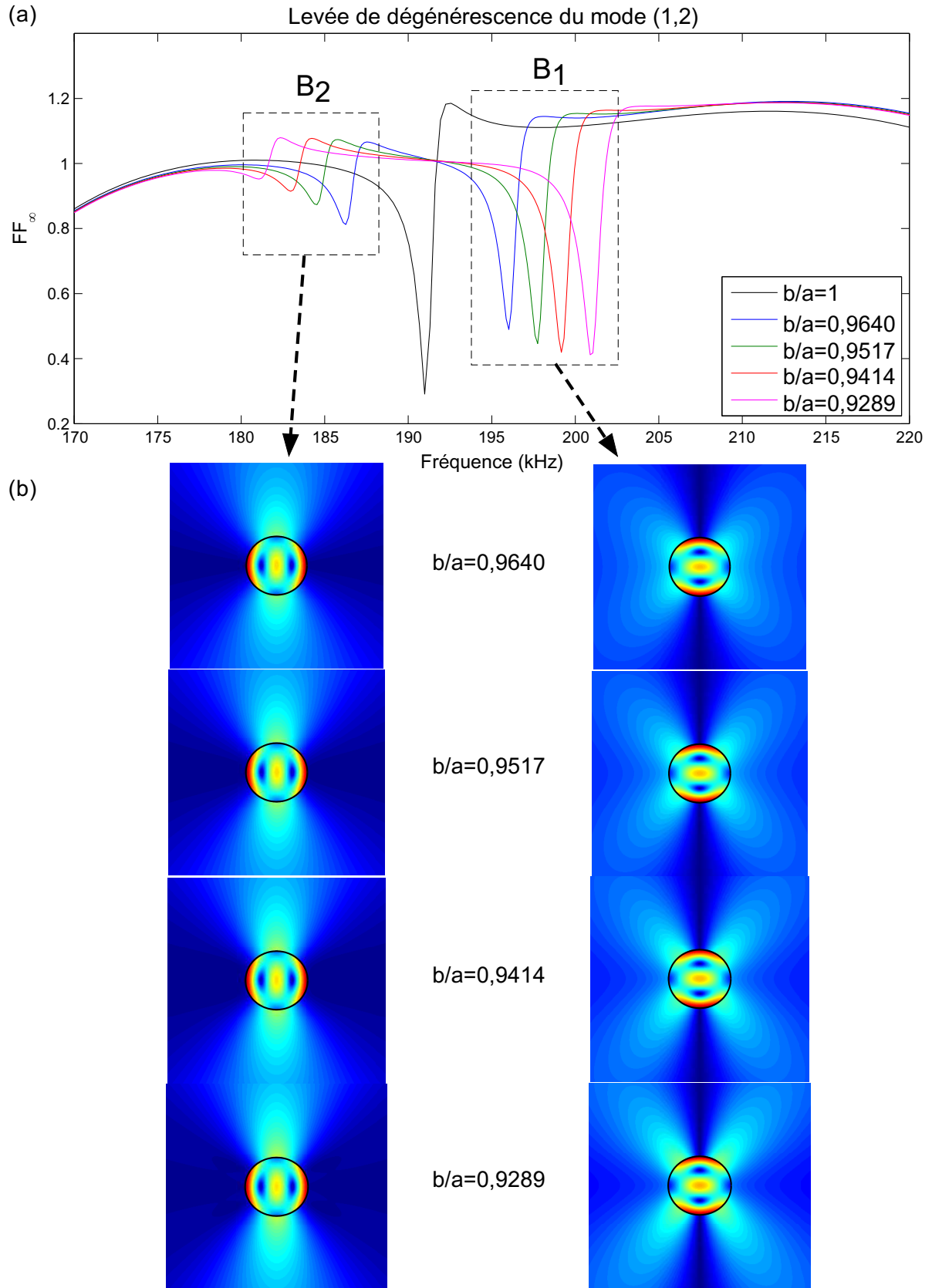


FIGURE 3.2 – Levée de dégénérescence du mode (1,2).

(a) Fonctions de forme.

(b) Pression diffusée et déplacement élastique.

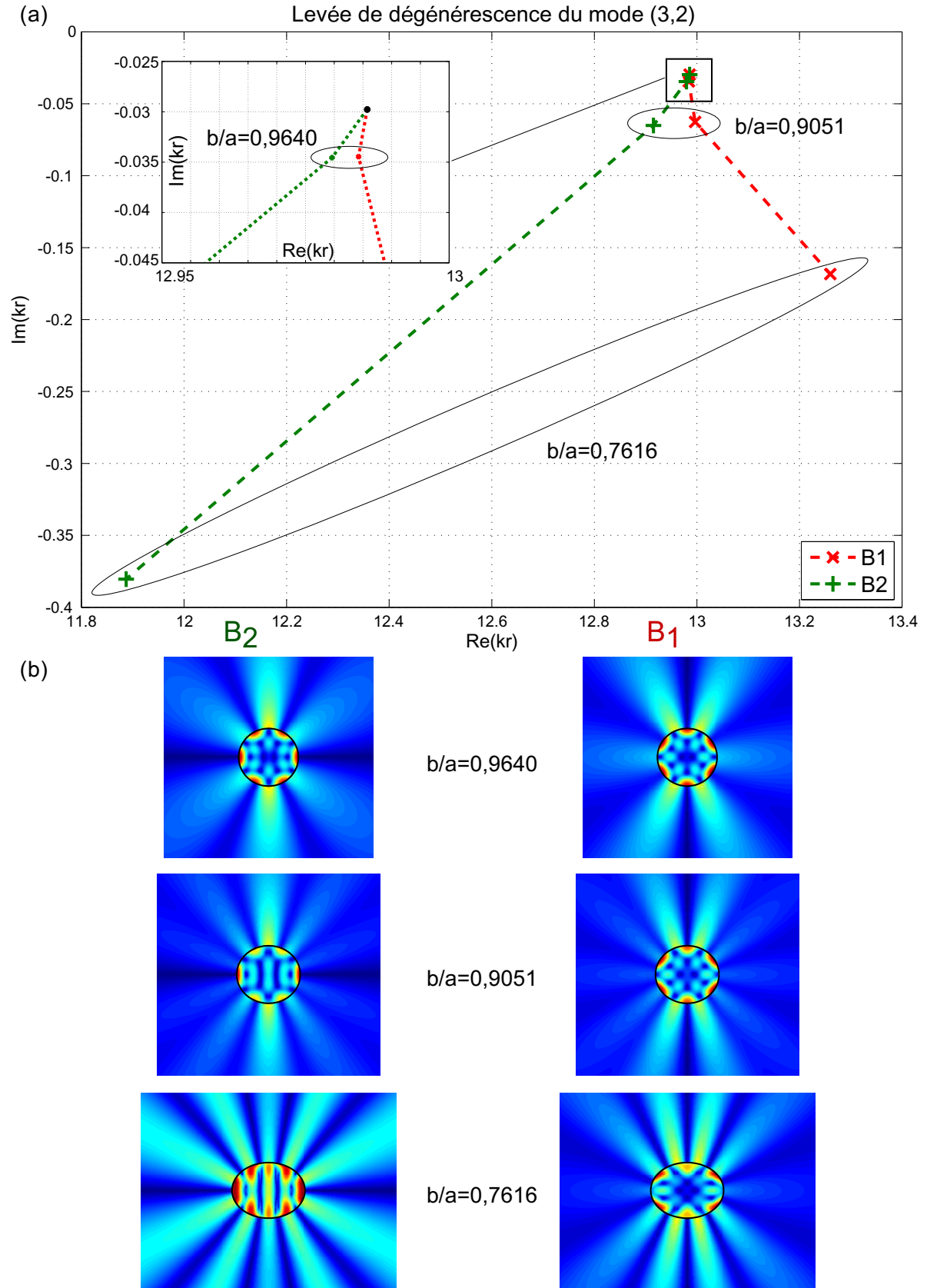


TABLE 3.1 – *Caractéristiques des transducteurs.*

	Fréquence centrale	Bande passante à -12 dB	Diamètre surface active
V389	$f \approx 475$ kHz $kr \approx 15$	$250 \text{ kHz} \lesssim f \lesssim 700 \text{ kHz}$ $8 \lesssim kr \lesssim 22$	4 cm
V392	$f \approx 870$ kHz $kr \approx 28$	$400 \text{ kHz} \lesssim f \lesssim 13700 \text{ kHz}$ $13 \lesssim kr \lesssim 41$	4 cm

3.3 ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE LA DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR DES CYLINDRES ÉLASTIQUES ELLIPTIQUES, COMPARAISON THÉORIE/EXPÉRIENCE

3.3.1 Description du dispositif d'excitation et de mesure

3.3.1.1 Méthode impuls ionnelle

Le méthode impuls ionnelle représente la technique classique utilisée en analyse spectrale. Elle consiste à utiliser une impuls ion de durée très brève pour l'excitation et à calculer la transformée de Fourier de la réponse à cette excitation. On obtient ainsi des informations concernant les variations d'intensité du signal mesuré en fonction de la fréquence. C'est la méthode retenue pour obtenir les fonctions de forme expérimentales. L'ensemble de la chaîne d'excitation et de mesure s'articule selon le schéma suivant (Fig. 3.4) :

- Un synthétiseur multifonctions fournit une impuls ion rectangulaire d'excitation dont la largeur peut être ajustée de manière à couvrir efficacement l'ensemble de la bande passante des transducteurs. Ce signal, après passage par un amplificateur de puissance, atteint un niveau de sortie d'une centaine de volts avant d'attaquer le transducteur d'émission.
- Un dispositif électronique de commutation permet d'effectuer des mesures soit en configuration monostatique, un seul transducteur étant utilisé à la fois pour l'émission et la réception (cas de la rétrodiffusion), soit en configuration bistatique, un transducteur pour l'émission et l'autre pour la réception dans le cas d'une insonification sous incidence variable.
- Les transducteurs sont de marque PANAMETRICS et possèdent les caractéristiques résumées en table (3.1). On se place dans les conditions de champ lointain afin que l'onde émise ait une structure d'onde plane, c'est à dire pour une distance transducteur-cylindre bien supérieure à la distance de Fresnel soit environ 60 cm à 1 MHz.
- Les ondes ultrasonores diffusées par le système sont mesurées par le transducteur de réception. Après amplification, le signal correspondant est transmis à un oscilloscope numérique qui réalise les opérations d'échantillonnage du signal ainsi que les moyennes sur plusieurs acquisitions dans le but d'améliorer le rapport signal sur bruit³.

3. La précision des mesures peut également être augmentée en saturant l'écho direct (spéculaire), dans le cas où l'on ne s'intéresse qu'à la partie résonante du signal (régime de ré-émission libre).

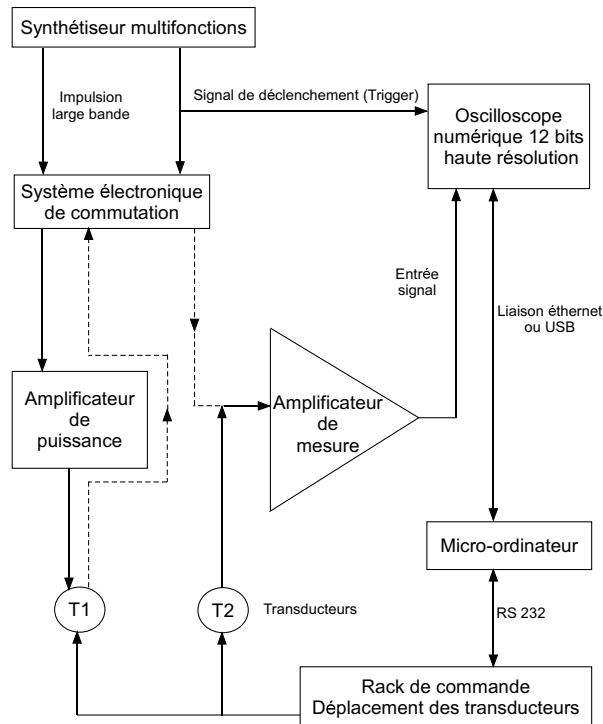


FIGURE 3.4 – Dispositif ultrasonore expérimental utilisé pour la méthode impulsienne.

3.3.1.2 Traitement numérique du signal

Le signal amplifié, numérisé et moyenné est stocké sur disque et transféré sur micro ordinateur afin d'être traité par des méthodes classiques de traitement du signal. On sélectionne la portion de signal temporel que l'on désire analyser à l'aide d'une fenêtre temporelle de pondération de type Hamming. Cette dernière représente le meilleur compromis entre la séparation fréquentielle de deux résonances voisines et la déformation minimale de la forme générale de la densité spectrale. On calcule ensuite la transformée de Fourier de la portion du signal sélectionné par un algorithme de transformée de Fourier discrète (FFT). Le spectre d'intensité (densité spectrale de puissance) ainsi calculé est alors normalisé par un spectre de référence obtenu par réflexion sur une surface parfaitement réfléchissante (la surface de l'eau de la cuve dans notre cas). On élimine par cette méthode l'influence de la réponse fréquentielle du transducteur ainsi que tous les bruits d'origine électronique créés par l'ensemble de la chaîne d'excitation et de mesure. On peut alors comparer les spectres calculés théoriquement aux spectres expérimentaux ainsi normalisés.

3.3.1.3 Méthode quasi-harmonique

Cette méthode permet d'obtenir les diagrammes angulaires pour les diffuseurs étudiés. Le signal électrique envoyé au transducteur d'émission est constitué de trains d'ondes sinusoïdaux de fréquence fixe, composés d'un grand nombre de périodes. Un synthétiseur multifonctions fournit une excitation sinusoïdale de fréquence fixée (Fig. 3.5). La durée des trains d'ondes doit être suffisamment grande pour l'établissement d'un régime permanent dans l'objet étudié et inférieure au temps de parcours séparant le transducteur de l'objet pour éviter toute interférence entre le signal d'émission et le signal diffusé par l'objet. La fréquence de répétition (durée séparant deux trains d'ondes consécutifs) doit être choisie de manière à ce que les échos parasites se réfléchissant sur les parois et le fond de la cuve ainsi qu'à l'interface eau-air soient fortement atténués. Le principe de la méthode expérimentale utilisée est basé sur la mesure d'amplitude au niveau de la portion du signal temporel

correspondant, dans notre cas, au régime de ré-émission libre. Pour cela, une fenêtre de mesure, dont la largeur et le retard sont réglables, permet de sélectionner la portion du signal amplifié désirée, puis un détecteur crête à crête fournit une tension proportionnelle à la valeur maximale de l'amplitude atteinte à l'intérieur de la fenêtre de mesure, le résultat de la mesure est ensuite stocké sur disque et transféré sur micro ordinateur. La procédure expérimentale est synchronisée avec les déplacements angulaires des transducteurs afin d'obtenir les diagrammes angulaires de façon automatique. Les déplacements angulaires sont motorisés et gérés par un dispositif piloté via une interface RS 232. On contrôle ainsi avec précision (jusqu'au centième de degré) les déplacements des transducteurs. Un déplacement vertical du diffuseur et des transducteurs est également prévu afin de régler la profondeur d'immersion et d'ajuster l'axe du faisceau ultrasonore incident avec le centre du diffuseur.

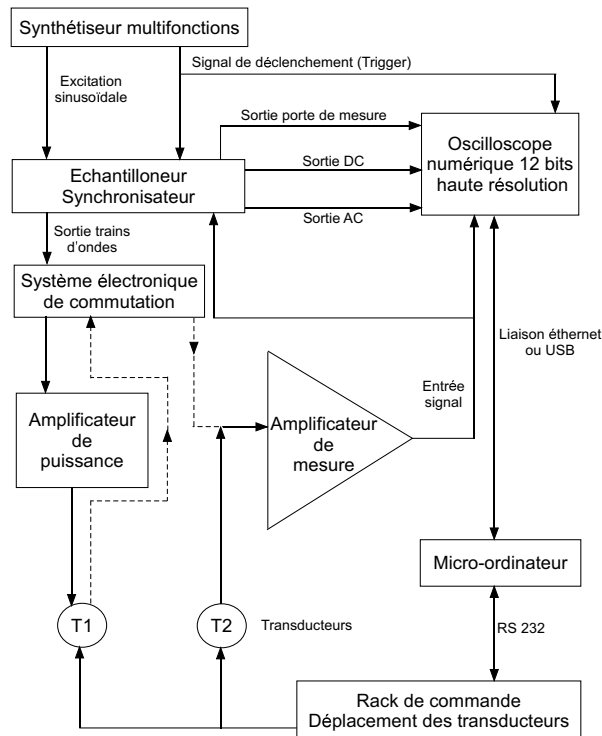


FIGURE 3.5 – Dispositif ultrasonore expérimental utilisé pour la méthode quasi-harmonique.

3.3.2 Description du dispositif expérimental

3.3.2.1 La cuve

Les mesures sont réalisées dans une cuve parallélépipédique, non anéchoïde, remplie d'eau ($\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, $c_{\text{eau}} = 1482,7 \text{ m.s}^{-1}$ calculée en tenant compte de la température de l'eau [Giangreco 1997]), de dimensions intérieures (cm) $190 \times 130 \times 90$ dans laquelle sont immergés les différents cylindres elliptiques les uns après les autres et le(s) transducteur(s). Le réglage de la distance séparant l'ensemble diffuseur du transducteur s'effectue manuellement le long d'un bras horizontal sur lequel la position du transducteur est repérée avec une précision de l'ordre du millimètre.

3.3.2.2 Les cylindres elliptiques

Les cylindres elliptiques sont en aluminium 5086 (ancienne dénomination Ag4mc; $\rho_s = 2670 \text{ kg.m}^{-3}$ - $c_L = 6277 \text{ m.s}^{-1}$ - $c_T = 3162 \text{ m.s}^{-1}$), ils mesurent 40 cm et possèdent des rapports b/a différents (0,9640 - 0,9051 - 0,7616 - 0,6351 - 0,5370). Il est important de

TABLE 3.2 – Table des caractères du groupe C_{2v} .

C_{2v}	E	C_2	σ_x	σ_y
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	-1	1

TABLE 3.3 – Influence de la valeur de l'angle d'incidence.

Angle d'incidence α	A_1	A_2	B_1	B_2
45° (incidence oblique)	✓	✓	✓	✓
0° (incidence selon le grand axe)	✓	×	✓	×
90° (incidence selon le petit axe)	✓	×	×	✓

spécifier que ces cylindres ont été usinés à périmètre constant dans le but de conserver la même longueur de parcours pour toute onde circonférentielle, quel que soit le rapport b/a . Ce périmètre est choisi égal à $2\pi \times 7,5$ mm.

3.3.3 Insonification par une onde plane et considérations de symétrie

Les cylindres sont insonifiés par une onde acoustique plane, sous plusieurs angles d'incidence α . Selon la valeur de α , la pression totale $p = p_{inc} + p_s$ n'est pas invariante selon toutes les transformations de symétrie données en section 1.2 et résumées dans la table des caractères (Tab. 3.2) :

- $\alpha = 45^\circ$ (incidence oblique) : p est invariante uniquement sous la transformation identité E . On obtient alors les résonances et la pression diffusée dans toutes les représentations ⁴.
- $\alpha = 90^\circ$ (petit axe) : p est invariante uniquement sous les transformations identité E et la réflexion miroir σ_y . On obtient alors les résonances et la pression diffusée dans les représentations A_1 et B_2 ⁵.
- $\alpha = 0^\circ$ (grand axe) : p est invariante uniquement sous les transformations identité E et la réflexion miroir σ_x . On obtient alors les résonances et la pression diffusée dans les représentations A_1 et B_1 ⁶.

Le tableau 3.3 résume les considérations présentées ci-dessus. On notera que pour toute valeur de α différente de 0° ou 90° , les résonances de toutes les représentations sont observées.

3.3.4 Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux

Les fonctions de forme expérimentales sont comparées aux fonctions de forme théoriques calculées à partir de l'équation (3.45) sur les figures (3.6) et (3.8 - 3.13). On observe un très bon accord entre la théorie et l'expérience dans la gamme de fonctionnement des transducteurs (Tab. 3.1) et même au-delà : on constate en effet que la comparaison reste très bonne en dehors de la bande passante à -12 dB. Les nombreuses variations rapides de forme caractéristique, prévues théoriquement, sont observées expérimentalement. Elles sont associées aux résonances élastiques localisées dans le plan complexe de la variable kr .

On s'intéresse maintenant à la mise en évidence expérimentale de la levée de dégénérescence des résonances. Ce phénomène, prévu par la théorie, s'interprète en terme de brisure

4. On considère la première colonne de la table des caractères.

5. On considère la première et la dernière colonnes de la table des caractères.

6. On considère la première et l'avant dernière colonnes de la table des caractères.

de symétrie et est observé numériquement dans le paragraphe 3.2.4.2. Sur le plan expérimental, la symétrie du cylindre circulaire est brisée en sélectionnant 5 cylindres elliptiques de rapports b/a décroissants (paragraphe 3.3.2.2). Pour observer la levée de dégénérescence, les résonances du cylindre circulaire (associées aux modes résonants (n, ℓ) dans le formalisme modal) sont suivies à mesure que la déformation vers le cylindre elliptique augmente, tout en conservant le périmètre constant, afin que la longueur de parcours pour toute onde circconférentielle reste identique, quel que soit le rapport b/a . Ce suivi permet alors d'identifier les modes non dégénérés du cylindre elliptique en leur associant le mode initial dégénéré du cylindre circulaire.

La figure (3.6) présente l'identification des modes résonants pour un cylindre elliptique très peu déformé ($b/a = 0,9640$). Les fonctions de formes théorique et expérimentale en incidence oblique pour ce cylindre sont présentées en figure (3.6a). Dans cette configuration, on rappelle que les résonances de toutes les représentations sont visibles (Sous-section 3.3.3). On relie les minima qui apparaissent sur ces fonctions de forme aux résonances localisées dans le plan complexe de la variable kr et on identifie tous les modes dans le domaine considéré (Fig. 3.6b). La levée de dégénérescence est observée théoriquement et expérimentalement, sur les fonctions de forme, dès que la symétrie est à peine brisée. Le tableau (3.4) présente les valeurs numériques des résonances dans le plan complexe de la variable kr à la fois pour le cylindre circulaire et le cylindre elliptique. La séparation des résonances est plus ou moins marquée selon le mode et s'opère à la fois en partie réelle et en partie imaginaire. Par exemple, pour le mode $(3, 2)$, la séparation n'est observable qu'à partir des valeurs données dans le tableau (3.4) tandis que, pour le mode $(1, 3)$, cette séparation est clairement visible sur la figure (3.6). On remarque, une fois encore, que les résonances se séparent en A_1 et A_2 (resp. en B_1 et B_2) pour tout indice angulaire n pair (resp. impair).

L'identification des modes est également possible à partir du calcul et de l'observation des amplitudes du déplacement élastique et de la pression diffusée. Ainsi, pour les hautes fréquences, où l'on a une prolifération des résonances, seule cette dernière méthode permet d'identifier sans ambiguïté le type de mode. C'est par exemple le cas des modes $(1, 6)$ et $(3, 4)$ tous deux séparés en B_1 et B_2 pour lesquels les valeurs de résonance sont très proches (Tab. 3.4). Ces deux modes sont identifiés à partir de l'observation combinée des ventres et noeuds d'amplitude du déplacement élastique, et des lobes de ré-émission de la pression dans le fluide (Fig. 3.7).

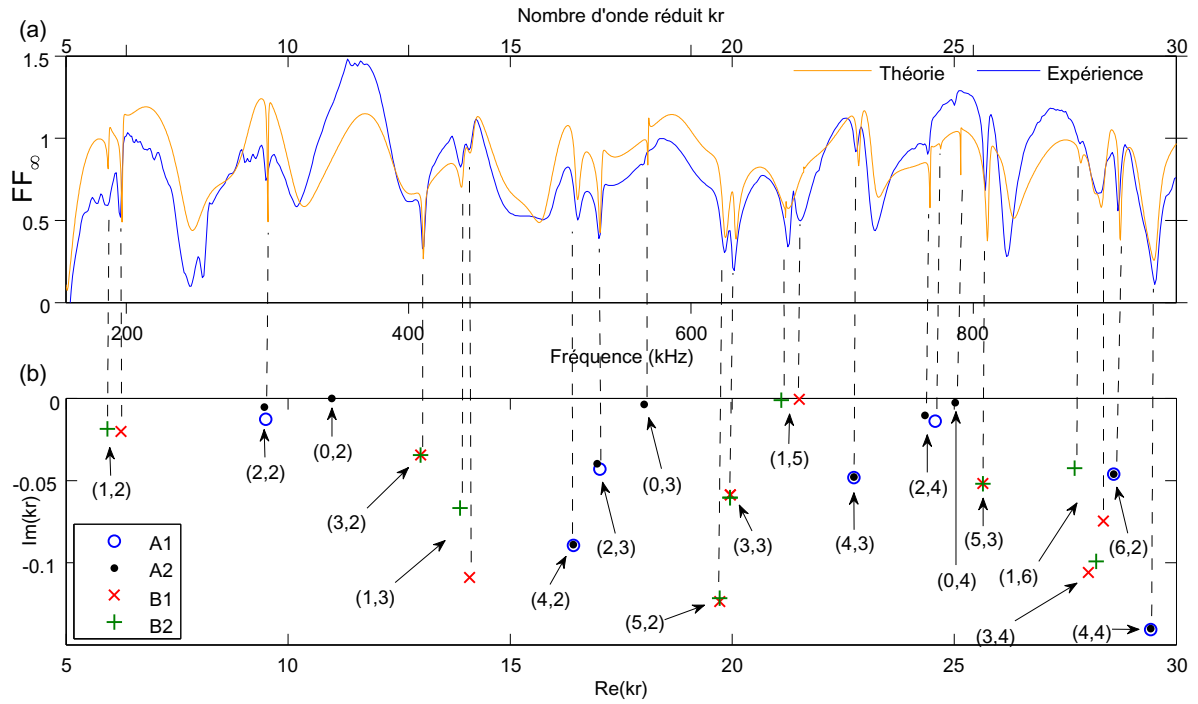


FIGURE 3.6 – Cylindre elliptique de rapport $b/a = 0,9640$ et identification des modes résonants. (a) Comparaison entre les fonctions de forme théorique et expérimentale en incidence oblique $\alpha = 45^\circ$. (b) Position des résonances de diffusion calculées numériquement dans le plan complexe de la variable kr et modes résonants.

TABLE 3.4 – Valeurs des résonances dans le plan complexe de la variable kr pour le cylindre circulaire et un cylindre elliptique faiblement déformé. Mise en évidence de la levée de dégénérescence.

Mode (n, ℓ)	Cylindre circulaire $b/a = 1$	Cylindre elliptique $b/a = 0,9640$	
		A_1	B_1
		A_2	B_2
(0, 2)	$10,952208 - 0,000000i$	$10,982882 - 0,000036i$	
(0, 3)	$17,950581 - 0,000001i$	$18,018652 - 0,003704i$	
(0, 4)	$24,780427 - 0,000001i$	$25,022599 - 0,002577i$	
(1, 2)	$6,082623 - 0,018496i$		$6,237696 - 0,020170i$
			$5,929548 - 0,018644i$
(1, 3)	$13,965108 - 0,083636i$		$14,085314 - 0,108891i$
			$13,871516 - 0,066768i$
(1, 5)	$21,266038 - 0,000054i$		$21,508857 - 0,000563i$
			$21,105430 - 0,001131i$
(1, 6)	$28,009562 - 0,021293i$		$28,357833 - 0,074684i$
			$27,711504 - 0,042388i$
(2, 2)	$9,491920 - 0,000480i$	$9,498585 - 0,012757i$	
		$9,464633 - 0,005295i$	
(2, 3)	$16,982927 - 0,041161i$	$17,017695 - 0,043031i$	
		$16,958345 - 0,039791i$	
(2, 4)	$24,525824 - 0,012236i$	$24,571041 - 0,013833i$	
		$24,338816 - 0,010279i$	
(3, 2)	$12,985747 - 0,029743i$		$12,984237 - 0,034454i$
			$12,979623 - 0,034555i$
(3, 3)	$19,901834 - 0,022905i$		$19,959125 - 0,058752i$
			$19,951108 - 0,060353i$
(3, 4)	$28,103153 - 0,126844i$		$28,017212 - 0,105878i$
			$28,195769 - 0,099174i$
(4, 2)	$16,441068 - 0,089688i$	$16,424902 - 0,089368i$	
		$16,422851 - 0,088966i$	
(4, 3)	$22,800998 - 0,008554i$	$22,739792 - 0,048230i$	
		$22,739375 - 0,047944i$	
(4, 4)	$29,398849 - 0,147601i$	$29,423114 - 0,140676i$	
		$29,421467 - 0,140132i$	
(5, 2)	$19,781948 - 0,159298i$		$19,719215 - 0,123565i$
			$19,717555 - 0,121580i$
(5, 3)	$25,716610 - 0,000424i$		$25,642248 - 0,051785i$
			$25,641825 - 0,052024i$
(6, 2)	$28,667012 - 0,004045i$	$28,587152 - 0,046066i$	
		$28,587110 - 0,046063i$	

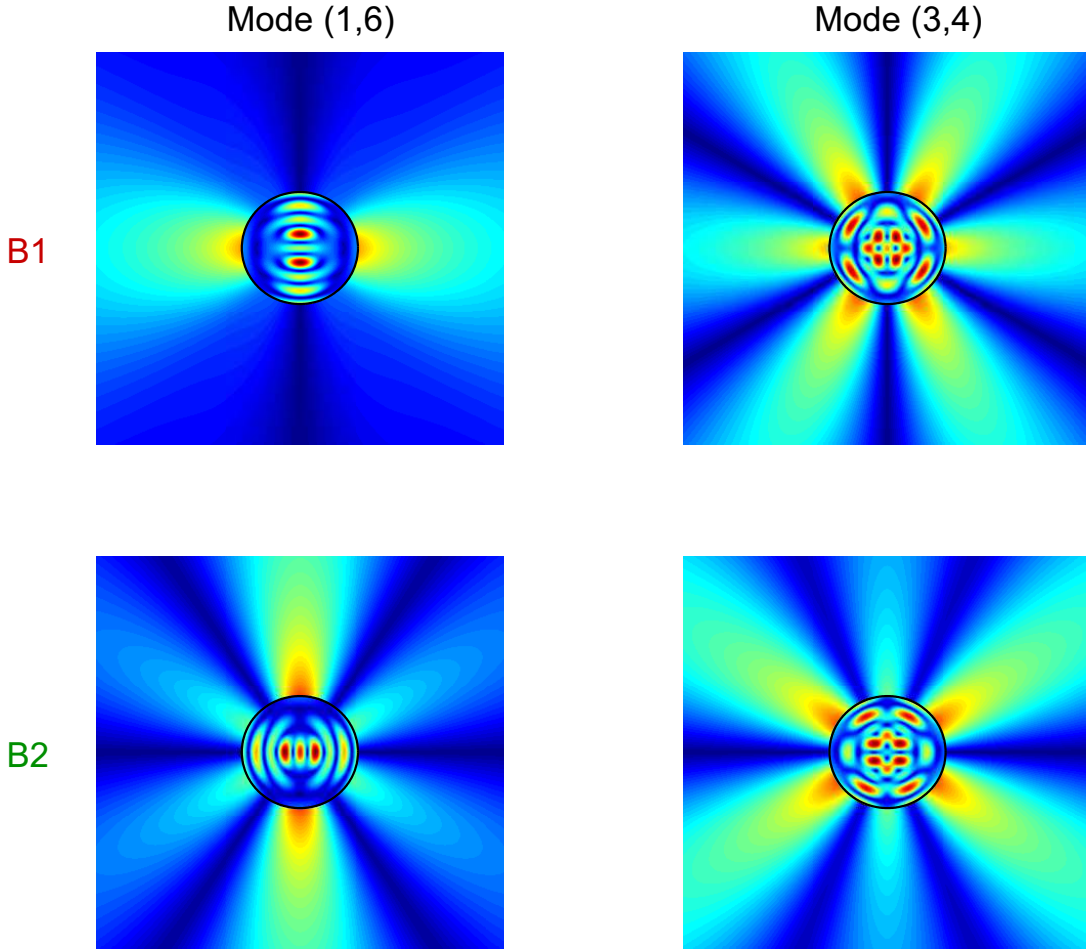


FIGURE 3.7 – Modes (1,6) et (3,4) en B_1 et B_2 , cylindre elliptique $b/a = 0,9640$.

On poursuit la comparaison théorie/expérience en suivant l'évolution des modes résonnants pour deux cylindres elliptiques lorsque le rapport b/a varie de 0,9640 (Fig. 3.8) à 0,9051 (Fig. 3.9), en incluant une mesure expérimentale supplémentaire (diagrammes angulaires).

Les fonctions de forme théorique et expérimentale en incidence oblique sont comparées dans les figures (3.8a) et (3.9a). On établit un parallèle entre les fonctions de forme et les localisations des résonances dans le plan complexe de la variable kr . Plus précisément, les parties réelles des résonances sont reliées aux résonances séparées sur ces fonctions de forme et on identifie les modes associés (Figs. 3.8b et 3.9b). On se limite à une partie imaginaire dont la valeur absolue n'excède pas 0,2. En effet, au delà de cette valeur, les résonances sont trop atténuées pour être observées sur les fonctions de forme. Lorsque la déformation s'accroît (Fig. 3.8 \rightarrow Fig. 3.9), on note que la séparation augmente à la fois en partie réelle et en partie imaginaire, ce qui permet à certains modes d'être identifiables sur les fonctions de forme. Par exemple, les modes (2,2) et (2,3) ne sont pas *suffisamment séparés* en partie réelle en $b/a = 0,9640$ (Fig. 3.8b); ils le sont en $b/a = 0,9051$ (Fig. 3.9b).

Parmi les modes séparés pour les deux valeurs du rapport b/a , on s'intéresse au mode (1,3) séparé en B_1 et B_2 , et au mode (2,4) séparé en A_1 et A_2 , pour couvrir l'ensemble des représentations irréductibles. Pour ces deux modes, des diagrammes angulaires expérimentaux ont été mesurés dans le régime de ré-émission libre (Figs. 3.8c et 3.9c). Les fréquences de l'onde plane incidente sont égales aux fréquences de résonance calculées des 4 modes séparés que l'on étudie. L'angle d'incidence est fixé en fonction des considérations de symétrie décrites en sous-section 3.3.3 pour la pression totale. La position du transducteur émetteur

est matérialisée par un petit carré rouge sur ces diagrammes angulaires. Pour chaque mode résonant $(1,3)^{B_1}$, $(1,3)^{B_2}$, $(2,4)^{A_1}$ et $(2,4)^{A_2}$, les mesures effectuées correspondent à la pression diffusée et sont en bon accord avec l'amplitude de la pression diffusée obtenue numériquement (Figs. 3.8d et 3.9d). Sur ces dernières figures, on présente également l'amplitude du déplacement élastique. En observant les mesures expérimentales (Figs. 3.8c et 3.9c) d'une part, en les comparant avec les résultats numériques (Figs. 3.8d et 3.9d) d'autre part, on peut identifier sans ambiguïté les 4 modes résonants. Plus précisément, le déplacement élastique permet de retrouver les indices angulaire n et radial l , tandis que la pression diffusée ne donne accès qu'à l'indice n .

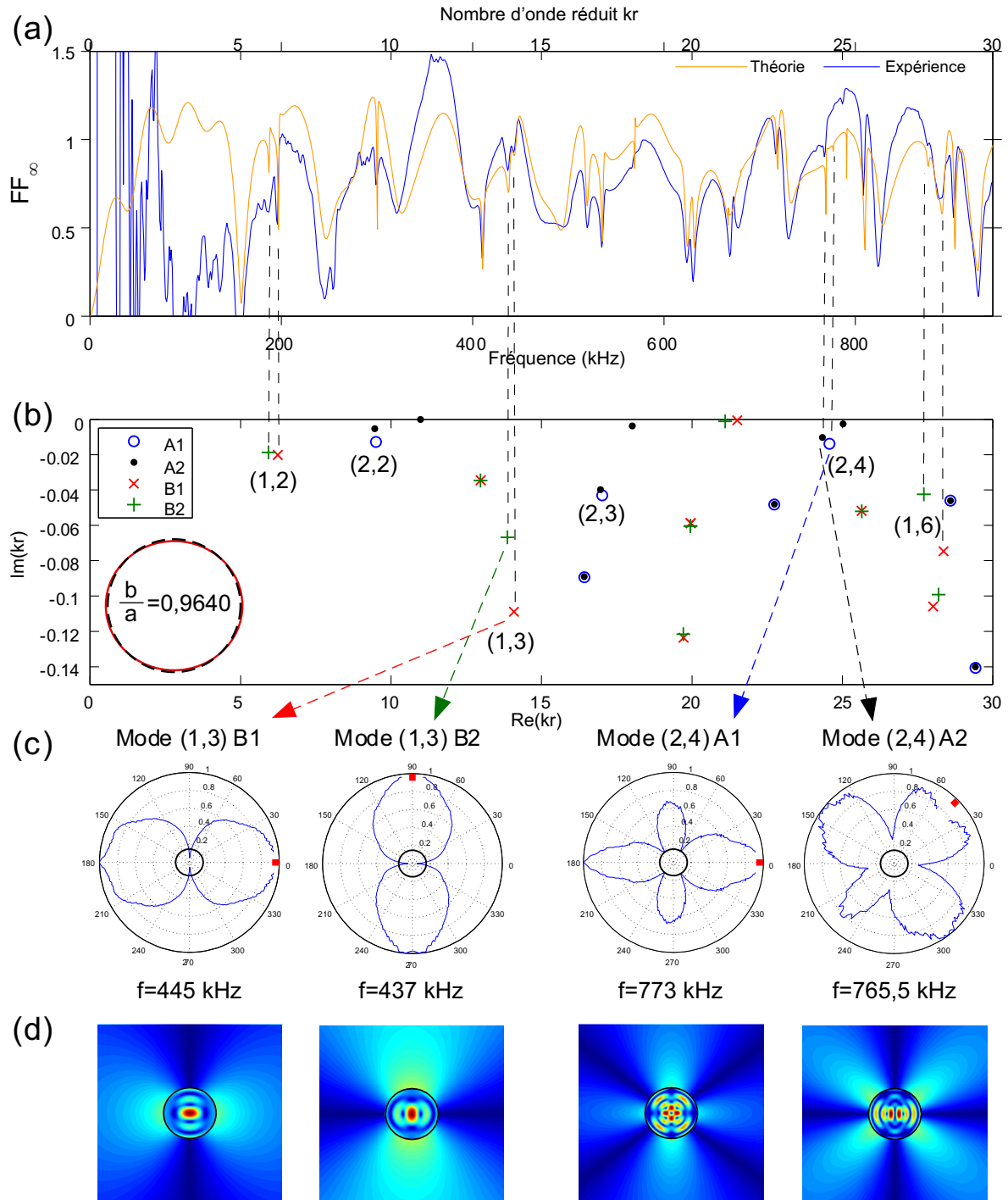


FIGURE 3.8 – Cylindre elliptique de rapport $b/a = 0,9640$. (a) Comparaison entre les fonctions de forme théorique et expérimentale en incidence oblique $\alpha = 45^\circ$. (b) Position des résonances de diffusion calculées numériquement dans le plan complexe de la variable kr . (c) Diagrammes angulaires expérimentaux. (d) Amplitudes du déplacement élastique et de la pression diffusée calculées numériquement.

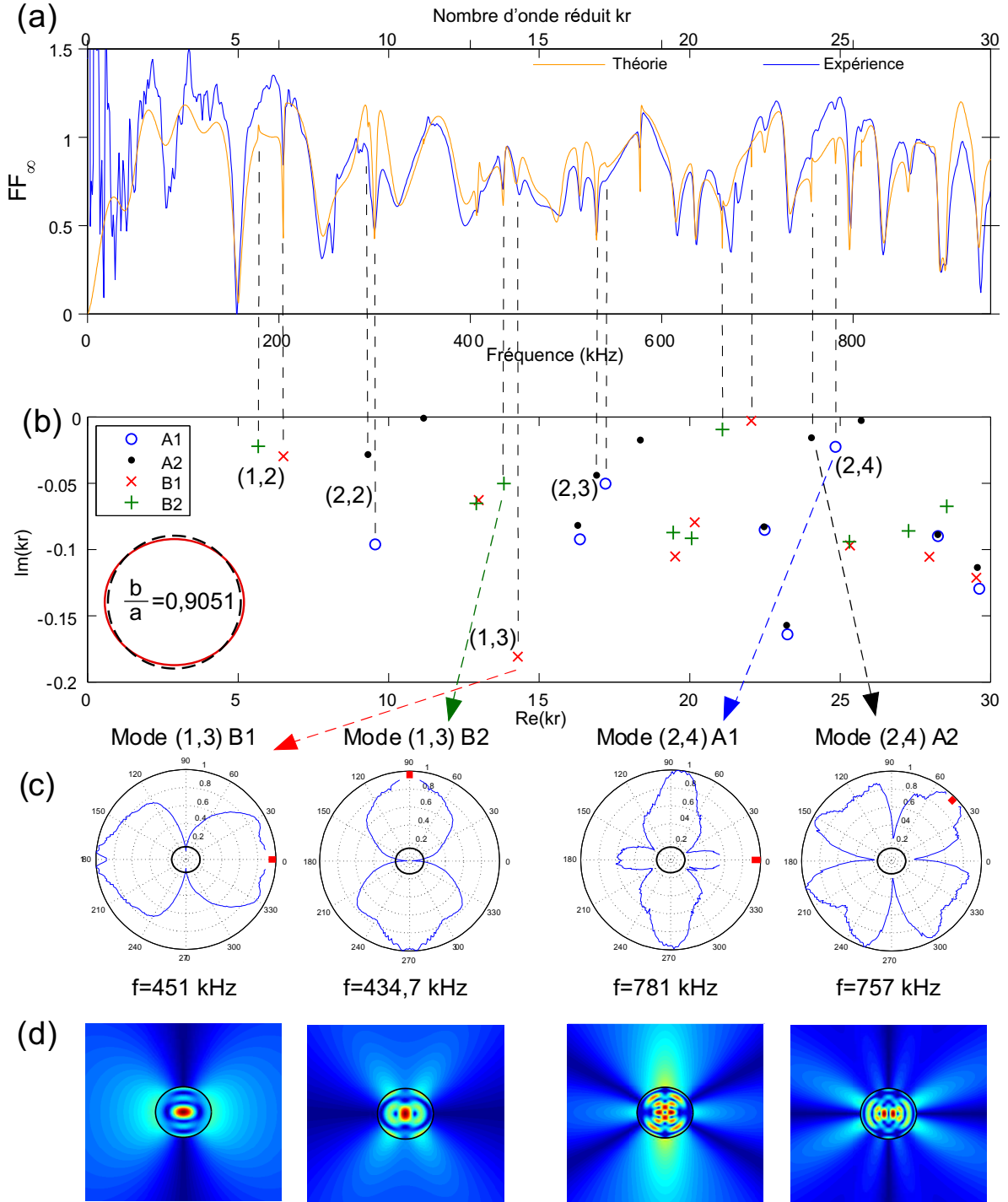


FIGURE 3.9 – Cylindre elliptique de rapport $b/a = 0,9051$. (a) Comparaison entre les fonctions de forme théorique et expérimentale en incidence oblique $\alpha = 45^\circ$. (b) Position des résonances de diffusion calculées numériquement dans le plan complexe de la variable kr . (c) Diagrammes angulaires expérimentaux. (d) Amplitudes du déplacement élastique et de la pression diffusée calculées numériquement.

Les figures (3.10) et (3.11) présentent un très bon accord entre les résultats théoriques et expérimentaux, et mettent en évidence l'influence de l'insonification du cylindre (Sous-section 3.3.3). Ainsi,

- sur la figure (3.10), seules les résonances qui appartiennent à A_1 et B_2 apparaissent à la fois sur les fonctions de forme théorique et expérimentale pour un angle d'incidence égal à 90° ,

- sur la figure (3.11), seules les résonances qui appartiennent à A_1 et B_1 apparaissent à la fois sur les fonctions de forme théorique et expérimentale pour un angle d'incidence égal à 0° .

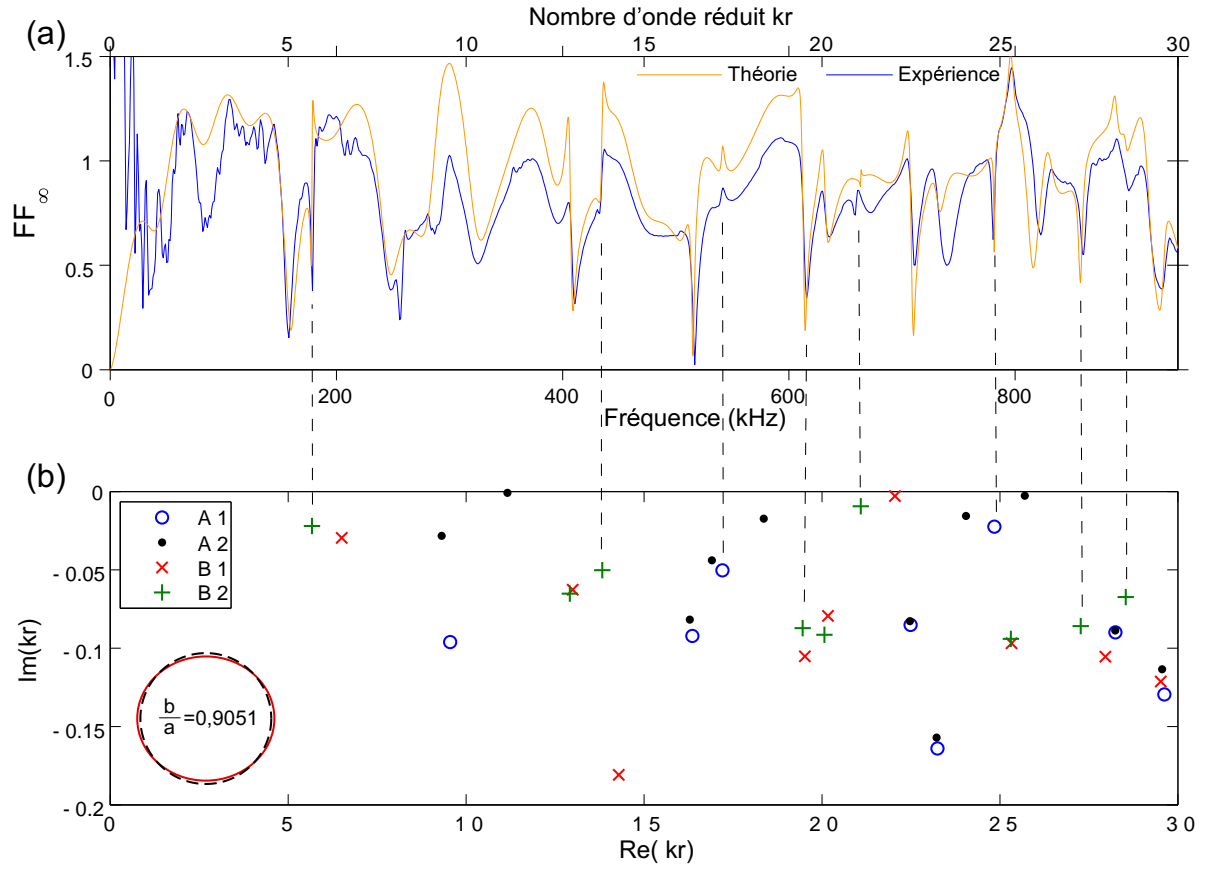


FIGURE 3.10 – Cylindre elliptique de rapport $b/a = 0,9051$, angle d'incidence 90° (petit axe). (a) Comparaison entre les fonctions de forme théorique et expérimentale. (b) Position des résonances de diffusion calculées numériquement dans le plan complexe en kr .

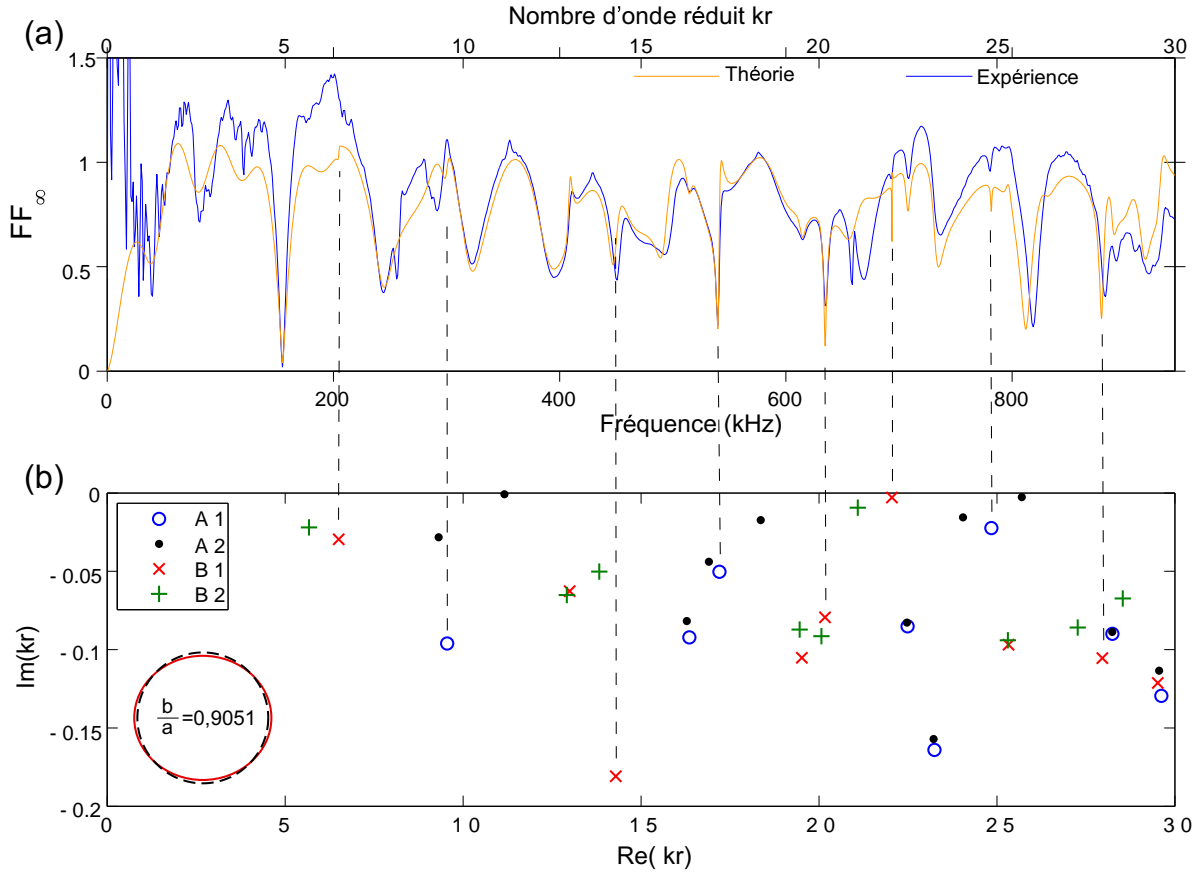


FIGURE 3.11 – Cylindre elliptique de rapport $b/a = 0,9051$, angle d'incidence 0° (grand axe). (a) Comparaison entre les fonctions de forme théorique et expérimentale. (b) Position des résonances de diffusion calculées numériquement dans le plan complexe de la variable kr .

Les figures (3.12) et (3.13) présentent un très bon accord théorie/expérience pour de faibles valeurs du rapport b/a (fortes excentricités). Bien que l'on puisse déterminer numériquement les résonances pour des excentricités importantes, il devient de plus en plus difficile d'identifier des modes *séparés* dans chaque représentation sur les fonctions de forme car de nombreuses résonances sont trop atténuées pour être observées sur celles-ci. Néanmoins, la levée de dégénérescence peut toujours être observée pour les valeurs complexes des résonances.

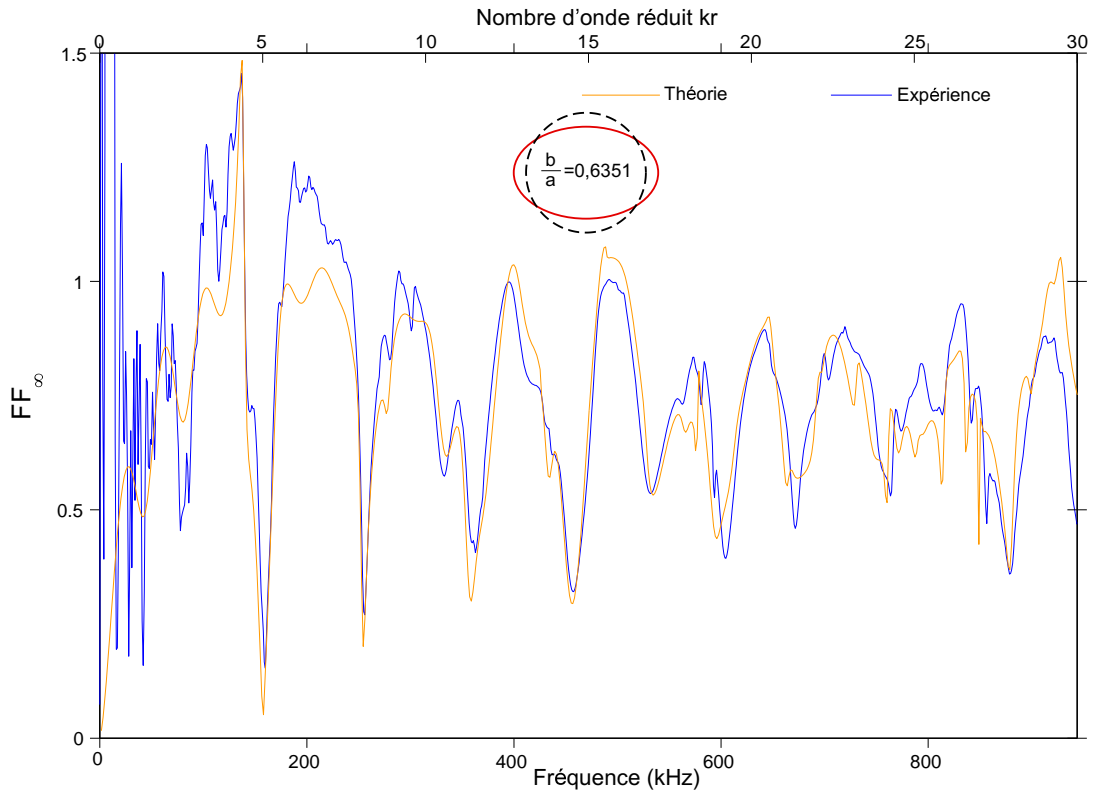


FIGURE 3.12 – Comparaison entre les fonctions de forme théorique et expérimentale pour un cylindre elliptique de rapport $b/a = 0,6351$ en incidence oblique ($\alpha = 45^\circ$).

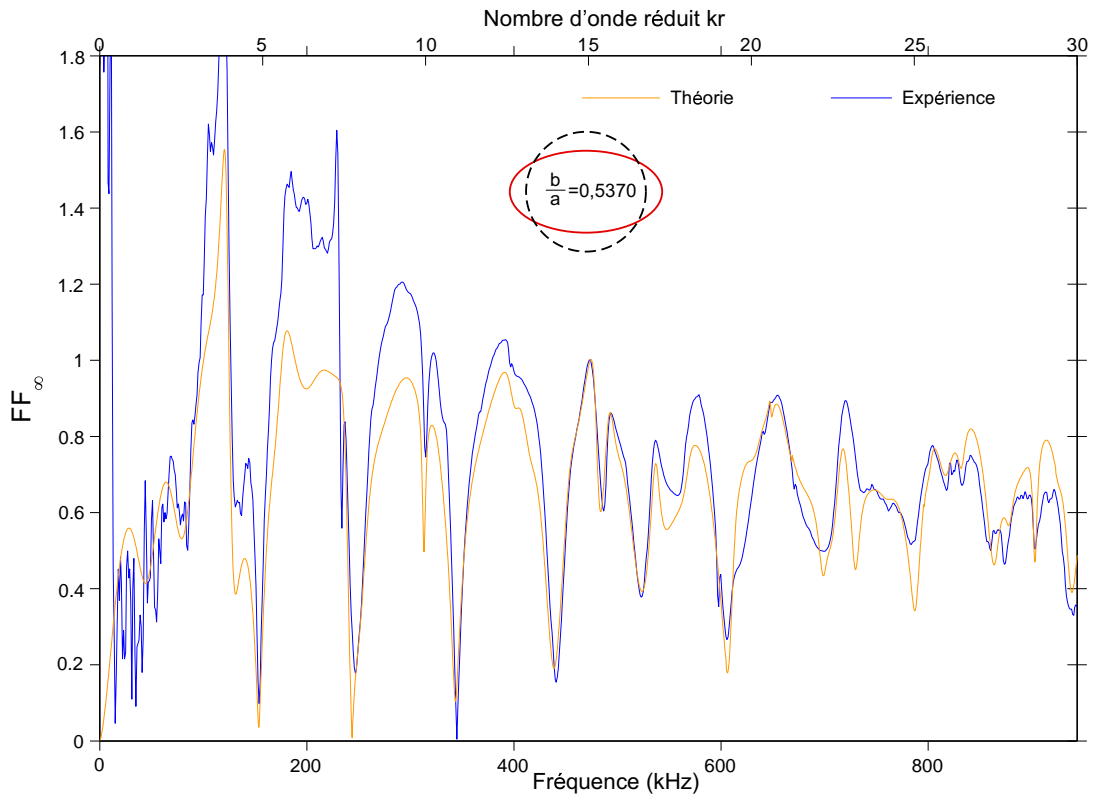


FIGURE 3.13 – Comparaison entre les fonctions de forme théorique et expérimentale pour un cylindre elliptique de rapport $b/a = 0,5370$ en incidence oblique ($\alpha = 45^\circ$).

Enfin, un très bon accord est observé en haute fréquence (jusqu'à $kr = 50$) entre les fonctions de forme théorique et expérimentale sur la figure (3.14). On note, une fois encore, que l'utilisation de la théorie des groupes permet d'obtenir des résultats précis dans ce domaine de fréquences.

D'autres configurations expérimentales, pour lesquelles on note à nouveau un très bon accord théorie/expérience, ont été étudiées mais ne sont pas présentées dans cette thèse. Les résultats présentés dans ce chapitre suffisent à mettre en évidence les phénomènes physiques prévus par la théorie et tous les apports de notre méthode.

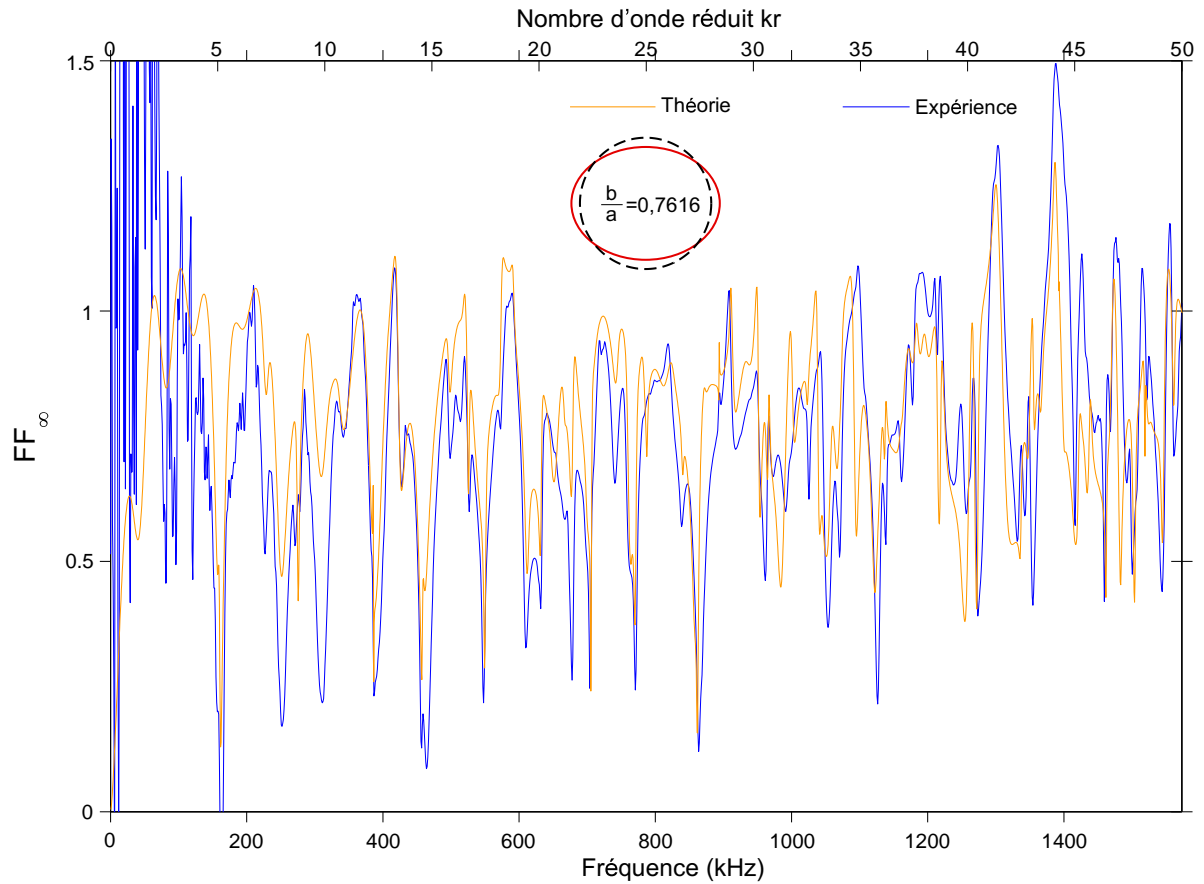


FIGURE 3.14 – Comparaison entre les fonctions de forme théorique et expérimentale pour un cylindre elliptique de rapport $b/a = 0,7616$ en incidence oblique ($\alpha = 45^\circ$) en haute fréquence.

CONCLUSION DU CHAPITRE

La diffusion d'une onde acoustique plane par un cylindre elliptique élastique infini a été étudiée à partir du formalisme modal combinée à notre méthode basée sur la théorie des groupes. Le découplage du problème sur les 4 représentations irréductibles entraîne une classification complète des résonances et une simplification du traitement numérique.

Une série d'expériences en cuve par spectroscopie ultrasonore a été menée dans le cas de cylindres elliptiques en aluminium immergés dans l'eau. Les résultats expérimentaux sont en très bon accord avec la théorie. En effet, la levée de dégénérescence est clairement observée à la fois théoriquement (numériquement) et expérimentalement. De plus, les modes résonants ont pu être identifiés à partir d'un suivi en excentricité des modes du cylindre circulaire.

On envisage l'étude de la diffusion par un sphéroïde. Il serait intéressant d'observer la levée de dégénérescence des résonances liée à la brisure de symétrie $O(3) \rightarrow \mathcal{D}_{\infty h}$. Cette transition est étudiée expérimentalement en chapitre 4 dans le cadre du problème intérieur.

MODES RÉSONANTS ET ONDE DE RAYLEIGH EN GÉOMÉTRIE SPHÉROÏDALE

SOMMAIRE

4.1	GÉNÉRATION ET DÉTECTION OPTIQUES D'ONDES ÉLASTIQUES	87
4.1.1	Génération d'ondes élastiques par impact laser	87
4.1.2	Détection sans contact	91
4.2	DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL	92
4.2.1	Présentation	92
4.2.2	Excitation sans contact par laser impulsif	94
4.2.3	Mesure sans contact par vibrométrie laser	97
4.2.4	Acquisition et traitement des données	98
4.3	ÉTUDE DANS LE DOMAINE TEMPOREL	100
4.3.1	Configuration émission - détection à 90°	102
4.3.2	Configuration émission - détection à 180°	106
4.4	ÉTUDE DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL	111
4.4.1	Spectre des résonances et levée de dégénérescence	111
4.4.2	Spectre des résonances et spectre des longueurs des orbites périodiques	116
	CONCLUSION DU CHAPITRE	122

Ce chapitre est consacré à l'étude expérimentale des modes résonants de sphéroïdes élastiques de formes oblate et prolata. On s'intéresse en particulier à l'onde de Rayleigh qui se propage sur la surface de ces objets. Les généralités sur les modes résonants sont rappelées dans le chapitre 2.

Notre approche est basée sur les techniques de génération et détection optiques d'ondes élastiques présentées en section 4.1. Les systèmes optiques permettent notamment de réaliser, dans une large bande de fréquences, une excitation et une mesure sans contact afin de ne pas perturber l'objet à étudier. Plus précisément, l'excitation sans contact par impacts laser permet d'obtenir une bonne reproductibilité des mesures, et la détection sans contact évite de fixer un capteur sur la surface qui introduirait un effet de masse ajoutée et une diffraction des ondes de surface.

En section 4.2, on décrit le dispositif expérimental mis en oeuvre ainsi que les outils utilisés pour réaliser notre étude. Plus précisément, des sphéroïdes de différentes excentricités en aluminium sont mis en vibration par impact laser et la mesure de vitesse et de fréquence s'effectue par vibrométrie laser. Les données temporelles peuvent ensuite être visualisées et traitées par transformée de Fourier rapide pour obtenir des spectres fréquentiels.

Les résultats expérimentaux obtenus pour ces sphéroïdes sont présentés en sections 4.3 et 4.4. Les mesures sont menées à la fois dans les domaines temporel (Section 4.3) et fréquentiel (Section 4.4). Dans le premier cas, on étudie l'onde de Rayleigh dans deux configurations expérimentales, afin de mettre en évidence les trajets parcourus par cette onde en géométrie sphéroïdale. Dans le second cas, on étudie la levée de dégénérescence des résonances, interprétée en termes de brisure de symétrie $\mathcal{O}(3) \rightarrow \mathcal{D}_{\infty h}$ (transition de la sphère vers le sphéroïde), et on donne également une interprétation en termes de rayons à travers la « dualité » entre le spectre des résonances et le spectre des longueurs des orbites périodiques.

4.1 GÉNÉRATION ET DÉTECTION OPTIQUES D'ONDES ÉLASTIQUES

L'apparition du laser dans les années 60 [Maiman 1960] a fait progresser les méthodes de génération et de détection sans contact. La génération d'ondes élastiques dans un solide a été démontrée pour la première fois en 1963 par White [White 1963]. Par rapport aux méthodes traditionnelles (transducteur piézoélectrique de contact), les systèmes optiques offrent de nombreux avantages : l'absence de contact mécanique, une mesure large bande sans perturbation du champ acoustique, la possibilité de modifier la position et la forme de l'objet en test qui peut être porté à très haute température [Monchalín 2004a]. L'association de la génération et de la détection optiques offrent des applications dans le domaine du contrôle non-destructif, ou encore pour caractériser des matériaux [Davies et al. 1993, Monchalín 2004b].

4.1.1 Génération d'ondes élastiques par impact laser

La génération d'ondes élastiques par un faisceau laser résulte de l'interaction du faisceau avec la surface du matériau. Elle dépend de l'impulsion laser (énergie incidente, durée, diamètre du faisceau, longueur d'onde) et des propriétés du matériau (propriétés optiques, élastiques, électroniques, thermiques). Ce dernier absorbe par effet Joule une partie de l'énergie incidente. Cette fraction d'énergie est convertie en chaleur puis en énergie mécanique et agit comme une force qui engendre des ondes élastiques dans le solide.

Les sources les plus utilisées sont le laser Nd-YaG constitué d'un cristal $Y_3Al_5O_{12}$ (Grenat d'Aluminium et d'Yttrium) dopé au néodyme et le laser CO_2 dans le régime nanoseconde [Royer 1996]. En régimes picoseconde ou femtoseconde, adaptés aux systèmes nanométriques ou submicrométriques, on utilise le laser Titane-Saphir.

En fonction de la densité de puissance, l'impact d'une impulsion lumineuse sur la surface libre d'un solide opaque engendre des ondes élastiques selon deux catégories de mécanismes : le régime thermoélastique et le régime d'ablation, qui apparaît au delà d'un seuil de densité de puissance lumineuse absorbée. Les ondes de volume sont générées différemment selon le type de régime. Quant aux ondes de surface, leur génération est liée à la forme de la source.

4.1.1.1 Régime thermoélastique

Pour des faibles puissances lumineuses (inférieures au seuil d'ablation, voir ci-après), l'augmentation de la température de la surface du matériau, due à l'absorption d'une fraction de l'énergie incidente par effet Joule, engendre une déformation mécanique (dilatation ou plus rarement contraction) localisée près de la surface, sans la détériorer (Fig. 4.1). Plus précisément, l'énergie absorbée reste localisée près de la surface (épaisseur de peau) en raison de l'effet d'écran des électrons de conduction et agit comme une source acoustique. Si elle se situe à l'intérieur du solide, elle génère des ondes longitudinales et le phénomène de conversion de mode lié à la présence de la surface engendre des ondes transversales. La combinaison de ces deux types d'onde donne naissance à l'onde de Rayleigh. On note que ce régime ne modifie pas l'état de la surface du matériau, il n'est donc pas destructif.

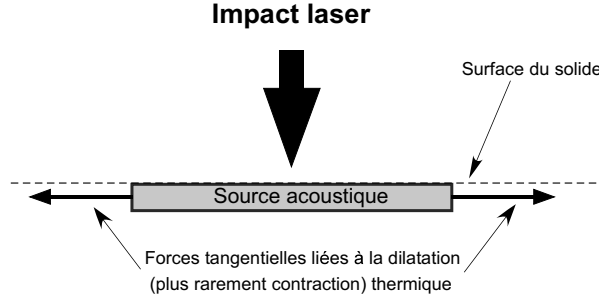


FIGURE 4.1 – Régime thermoélastique

4.1.1.2 Régime d'ablation

Lorsque la densité de puissance lumineuse $I(\text{W.m}^{-2})$ dépasse le seuil d'ablation I_{seuil} [Ready 1971]

$$I_{\text{seuil}}(\text{W.m}^{-2}) = \sqrt{\frac{\pi K \rho C_m}{4\tau}} (T_v - T_i) \quad (4.1)$$

(avec $K(\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1})$ la conductivité thermique du matériau, $C_m(\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1})$ sa capacité thermique massique, $T_i(\text{K})$ sa température initiale, $T_v(\text{K})$ sa température de vaporisation, $\rho(\text{kg.m}^{-3})$ sa masse volumique, $\tau(\text{s})$ la durée de l'impulsion laser), l'augmentation de la température engendre une vaporisation d'une fraction de matière en surface. Cette éjection de matière engendre une force normale à la surface¹ dans la zone irradiée [Ready 1971] comme cela est représenté sur la figure (4.2). Les forces tangentielles provenant du régime thermoélastique existent encore mais sont plus faibles que les forces normales. Les ondes élastiques générées dans ce régime sont différentes de celles générées dans le régime thermoélastique (forme du signal temporel, amplitude). On note que ce régime n'est pas totalement non destructif.

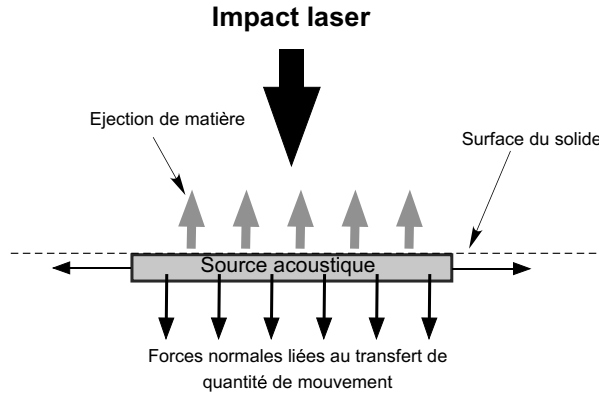


FIGURE 4.2 – Régime d'ablation

Dans le cas de l'aluminium 2017A (ancienne dénomination AU4G), on estime le seuil d'ablation à

$$I_{\text{seuil}}(\text{W.m}^{-2}) = \sqrt{\frac{\pi \times 134 \times 2790 \times 873}{4 \times 6 \times 10^{-9}}} (2600 - 293) \approx 4,77 \times 10^{11} \text{W.m}^{-2} \quad (4.2)$$

soit environ 48MW.cm^{-2} . Nous travaillerons dans ce régime et donnerons les détails en sous-section 4.2.2.

1. Plus précisément, elle engendre un transfert de quantité de mouvement qui génère cette force.

4.1.1.3 Diagrammes de directivité

Les diagrammes de directivité mettent en évidence le rayonnement des ondes longitudinales et transversales dans le matériau. En champ lointain (distance d'observation grande devant les longueurs d'onde acoustiques), ils ont été modélisés [Miller et Pursey 1954, Hutchins et al. 1981, Zhang et al. 1997] et vérifiés expérimentalement [Aindow et al. 1981, Corbel et al. 1993]. Les fonctions de directivité dépendent du rapport $\frac{c_L}{c_T}$. Nous présentons ici les diagrammes (cas d'une source ponctuelle) pour l'aluminium où $\frac{c_L}{c_T} \approx 2$, ce qui correspond à notre cas.

Régime thermoélastique Sur la figure (4.3a), on observe que le rayonnement des ondes longitudinales est nul selon la normale à la surface et maximal à environ 65° . Dans le cas des ondes transversales (Fig 4.3b), le rayonnement est toujours nul selon la normale à la surface mais l'est également pour un angle de 45° . Il est maximal aux environs de 30° .

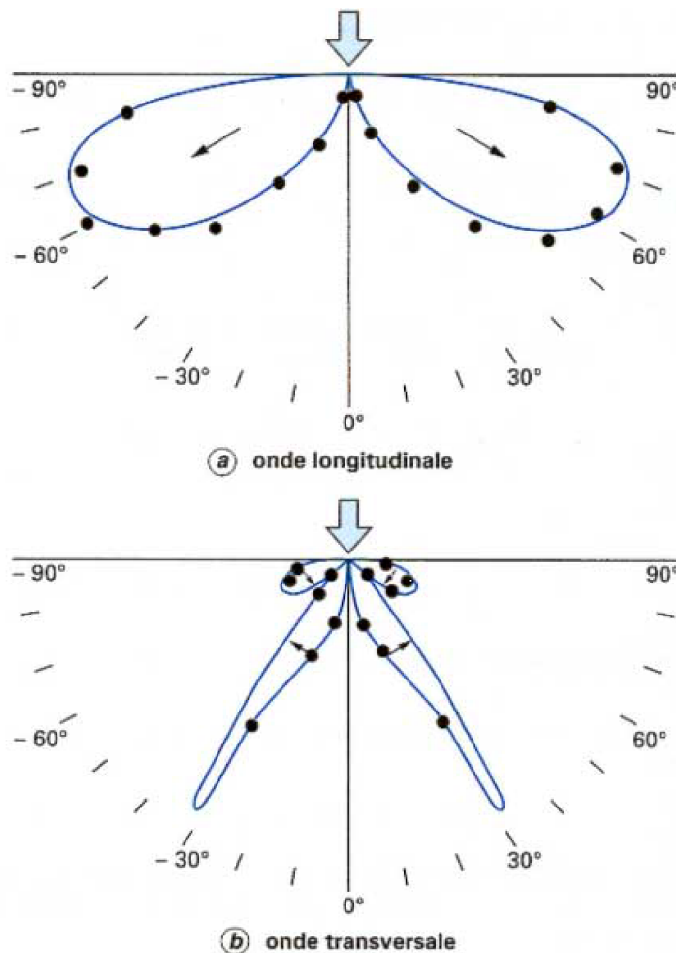


FIGURE 4.3 – Diagrammes de directivités en régime thermoélastique (Aluminium) [Royer 1996]. Les points expérimentaux sont ceux de la référence [Pouet 1991].

Régime d'ablation Sur la figure (4.4a), on observe que le rayonnement des ondes longitudinales est omnidirectionnel, le maximum d'amplitude se situe selon la normale à la surface.

Dans le cas des ondes transversales (Fig. 4.4b), le déplacement est nul selon la normale à la surface et est maximum aux environs de 35° .

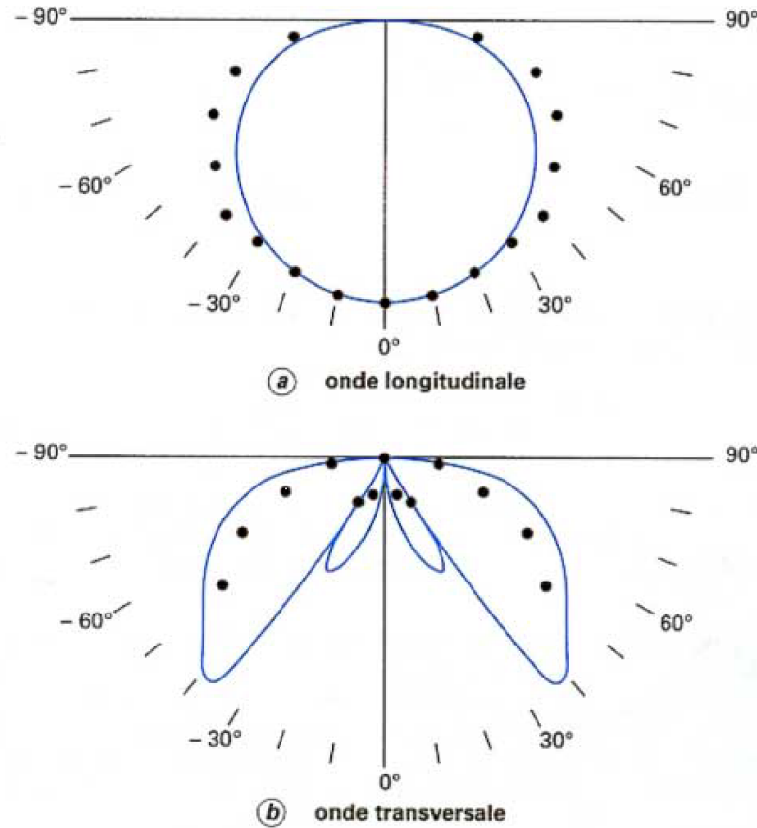


FIGURE 4.4 – Diagrammes de directivités en régime d'ablation (Aluminium) [Royer 1996]. Les points expérimentaux sont ceux de la référence [Pouet 1991].

4.1.1.4 Propagation des ondes ultrasonores

En régime thermoélastique, les ondes transversales sont engendrées plus efficacement que les ondes longitudinales (proportion : 70% ondes transversales / 30% ondes longitudinales). En régime d'ablation, le déplacement des ondes longitudinales augmente. Plus généralement, l'émission laser provoque un échauffement localisé sous la surface et la génération d'ondes de surface est favorisée. Les ondes de Rayleigh sont générées après conversion de mode des ondes longitudinales et transversales, quel que soit le régime de fonctionnement du laser. Cependant, leur amplitude est augmentée en régime d'ablation [Royer et al. 1988, Jia et al. 1992, Clorennec et Royer 2004].

4.1.1.5 Forme de la source

Il existe différentes formes de sources d'ondes ultrasonores. La directivité du rayonnement engendré diffère en fonction de la forme de la source [Hutchins et al. 1981, Aussel 1986]. Le choix d'une source linéique va favoriser une direction de propagation pour les ondes de surfaces (dans un plan perpendiculaire à la ligne). Dans nos applications, la géométrie sphéroïdale « impose » le choix d'une source ponctuelle pour ne pas briser la symétrie de l'objet. La taille de la source ponctuelle est de l'ordre du diamètre de la tâche focale au point d'impact.

4.1.2 Détection sans contact

Les dispositifs optiques, en comparaison des détecteurs piézoélectriques, présentent l'avantage d'une mesure sans contact mécanique, avec une bande passante très large. Ils peuvent être de deux types : non interférométriques et interférométriques. Les sondes non interférométriques exploitent la déflexion ou la diffraction du faisceau lumineux et sont bien adaptées à un balayage rapide de la surface. Nous utiliserons les sondes interférométriques qui exploitent la modulation de la phase ou de la fréquence du faisceau lumineux qui se réfléchit sur la surface en vibration [Royer 1996]. Le principe consiste à mesurer la différence de trajet entre un faisceau lumineux de référence et un faisceau lumineux rétrodiffusé par une surface en vibration. Il existe deux types d'interférométrie : hétérodyne et homodyne. Dans le premier cas, un des faisceaux est transposé dans le domaine des radio-fréquences. Dans le second cas, il n'existe pas de décalage en fréquence. Le rapport signal sur bruit dans un montage homodyne est plus faible que dans un montage hétérodyne en raison de sa sensibilité au bruit basse fréquence.

La sonde optique que l'on utilise dans la suite est un vibromètre laser. Cette sonde comporte un laser et un interféromètre de Mach-Zehnder, de type hétérodyne. Avec ce type d'interféromètre, un signal haute fréquence est généré sur le photo-détecteur à l'aide d'une cellule de Bragg. Pour effectuer la mesure de vibration le faisceau laser pointe sur l'objet en vibration et ce dernier le rétrodiffuse. L'amplitude de la vitesse (resp. du déplacement) d'un objet en vibration génère une modulation de la fréquence (resp. de la phase) du faisceau laser (effet Doppler). Cette modulation est transmise vers l'unité de traitement du signal à l'aide de démodulateurs (ou décodeurs) adaptés. L'information sur la vitesse est récupérée à partir de la modulation en fréquence du signal Doppler, tandis que le déplacement peut être reconstruit à partir de la modulation de la phase. La figure (4.5) présente les différents signaux traités par le dispositif de vibrométrie laser.

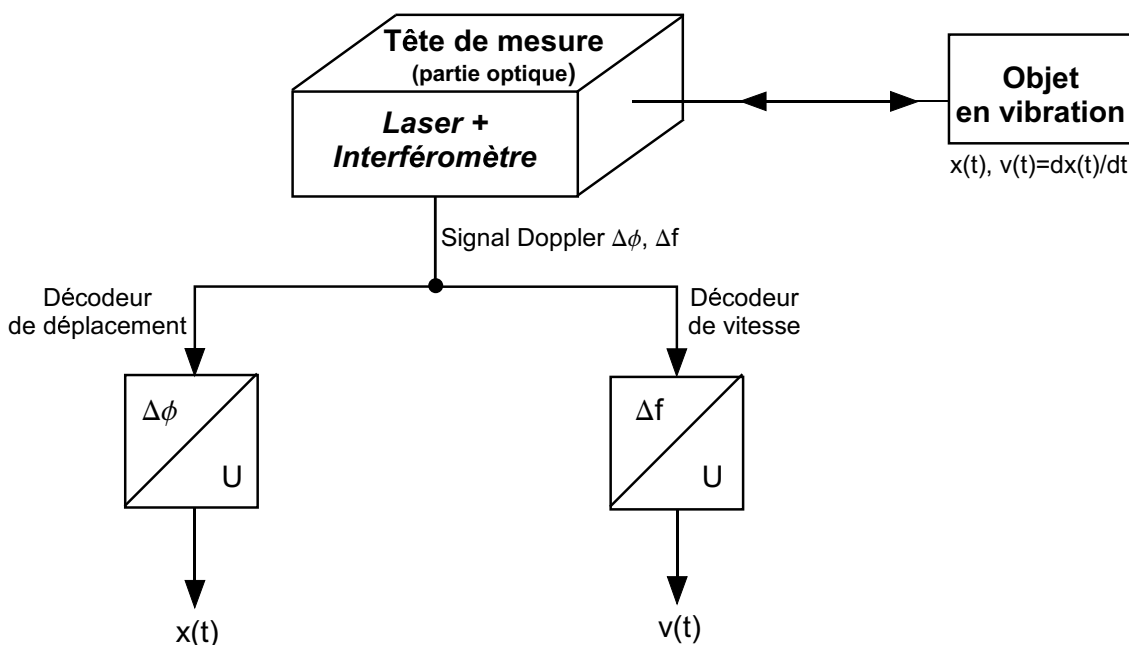


FIGURE 4.5 – Schéma de principe du dispositif de vibrométrie laser.

La sonde optique utilisée sera détaillée plus loin en sous-section 4.2.3. Nous choisissons un dispositif muni d'un décodeur de vitesse plutôt que d'un décodeur de déplacement. Il permet la mesure de la composante de la vitesse de la surface de l'objet étudié selon l'axe du faisceau laser et de la fréquence de la vibration correspondante. La résolution pour la

mesure de déplacement est limitée par le bruit de fond mais également par le système de comptage des franges d'interférences. La résolution pour la mesure de vitesse est uniquement limitée par le bruit de fond, qui est en général plus de 100 dB en dessous de la pleine échelle. La gamme dynamique est 10 fois supérieure à celle disponible via la mesure de déplacement. Contrairement à la mesure d'amplitude de déplacement, la mesure d'amplitude de vitesse est mieux adaptée aux mesures hautes fréquences (meilleure résolution). Lorsque la fréquence augmente, une vibration va générer de plus grandes vitesses pour de faibles déplacements. Enfin, le rapport signal sur bruit est augmenté dans le cas de la mesure de vitesse (source : documentation technique Polytec).

Description de la tête de mesure (Fig. (4.6)) Le vibromètre laser (modèle monopoint OFV-505, société Polytec) comporte un interféromètre de Mach-Zehnder. Le faisceau laser incident, polarisé horizontalement, est scindé par un cube séparateur A en un faisceau de référence R et un faisceau sonde (ou objet) S. Le faisceau sonde passe à travers le séparateur de faisceau polarisant B ainsi qu'à travers la lame quart d'onde, puis est focalisé par la lentille sur l'objet qui le réfléchit. Le séparateur B associé à la lame forment un coupleur optique directionnel qui dévie le faisceau sonde sur le séparateur C. La différence de chemin optique entre les faisceaux référence et sonde crée un signal d'interférence. Le faisceau référence est dirigé par un prisme vers la cellule de Bragg (Modulateur Acousto-Optique) puis la photodiode (détecteur sur la figure (4.6)). Le MAO décale la fréquence du laser de f_B , la fréquence de Bragg (70 MHz), afin de déterminer la direction de la vitesse. Le signal d'interférence résultant est converti en signal électrique pour être par la suite *décodé* par le contrôleur (décodeur de vitesse).

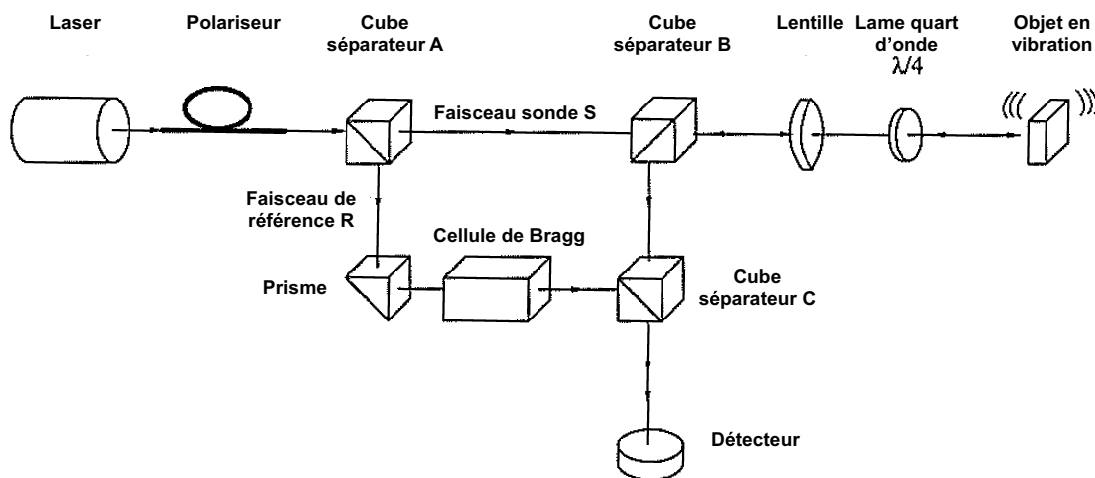


FIGURE 4.6 – Configuration optique de l'interféromètre dans la tête de mesure (source : documentation technique Polytec).

4.2 DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

4.2.1 Présentation

On présente en figure (4.7) un schéma simplifié du montage expérimental. L'objet est positionné sur un support formé de trois fines tiges en Téflon® reposant sur un bloc de béton isolé du sol par un matériau anti-vibration (Sorbothane®, polymère synthétique viscoélastique d'uréthane). Les appareils d'excitation et de mesure reposent également sur des

plaques de ce même matériau afin d'être isolés des perturbations extérieures transmises par le sol et les murs.

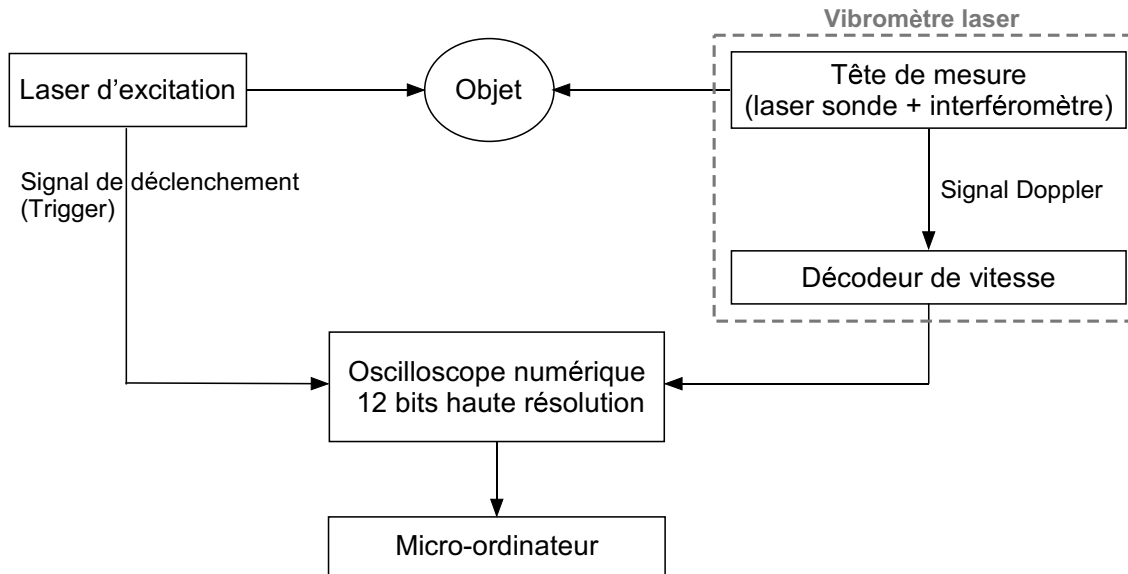


FIGURE 4.7 – Montage expérimental.

4.2.1.1 Les objets étudiés

Les objets sont en aluminium 2017A (AU4G) ($\rho_s = 2790 \text{ kg.m}^{-3}$ - $c_L = 6200,68 \text{ m.s}^{-1}$ - $c_T = 3123,39 \text{ m.s}^{-1}$) et usinés à volume constant, avec une tolérance fixée au dixième de mm. L'aluminium 2017A possède de bonnes propriétés mécaniques (réponse élastique) et de très bonnes aptitudes à l'usinage. Les sphéroïdes sont obtenus à partir de la rotation d'une ellipse soit autour de son grand axe A (forme prolata « oeuf »), soit autour de son petit axe B (forme oblate « gallet ») (Fig. 4.8). Les objets étudiés sont les suivants :

- 1 sphère de diamètre 80 mm,
- 5 sphéroïdes de forme prolata dont les dimensions sont données dans le tableau (4.1),
- 5 sphéroïdes de forme oblate (Tab. 4.1).

Les sphéroïdes P_4, P_5, O_4 et O_5 sont utilisés pour les expérimentations à la fois dans les domaines fréquentiel et temporel.

Dans la suite, pour faciliter l'interprétation physique des ondes se propageant à la surface des sphéroïdes, on note que

- tout plan passant par l'axe de rotation des sphéroïdes et contenant l'ellipse (disque elliptique) est appelé plan méridien,
- le plan contenant le cercle de plus grand diamètre (disque circulaire) est appelé plan équatorial.

TABLE 4.1 – Dimensions des sphéroïdes.

	Sphéroïdes prolates					Sphéroïdes oblates				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
A (mm)	81,58	83,29	85,50	104,50	142,24	80,79	81,63	82,70	92,38	101,20
B (mm)	79,22	78,41	77,39	70,00	60,00	78,45	76,84	74,86	60,00	50,00
B/A	0,97	0,94	0,91	0,67	0,42	0,97	0,94	0,91	0,65	0,49

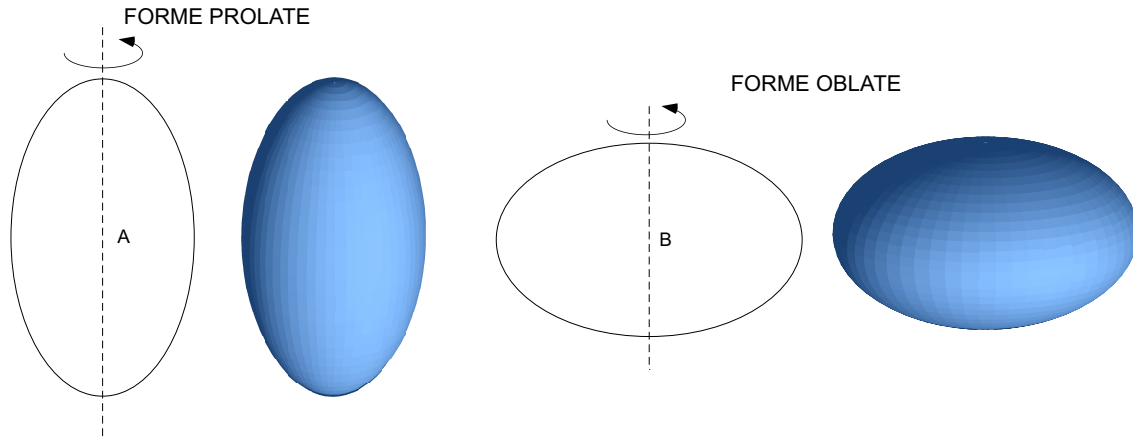


FIGURE 4.8 – Sphéroïdes de forme prolates et de forme oblates.

4.2.1.2 Le support

En posant l'objet à étudier sur un support ou en le suspendant, on provoque un ou plusieurs points de contact entre cet objet et son support. Ces contacts introduisent une brisure de symétrie et par suite une levée de dégénérescence des résonances. Le type de support doit être choisi de façon à minimiser cet effet. Cette levée de dégénérescence, que l'on qualifiera par la suite d'« accidentelle », doit être dans tous les cas très inférieure à celle liée au changement de géométrie que l'on souhaite mettre en évidence lors du passage de la sphère au sphéroïde. De plus, le type de support doit être choisi afin que les points de contact minimisent l'absorption et la transmission des ondes de l'objet vers le support. Nous avons donc testé différents supports, principalement de deux types : la suspension par un fil de nylon et le repos sur trois points de contact. Pour les trois points de contact, nous avons testé : 3 aiguilles métalliques et 3 vis en Téflon que l'on a taillées afin de réduire la zone de contact. Afin d'évaluer l'influence des différents supports, nous mesurons expérimentalement le spectre des résonances de la sphère pour chacun d'eux. On compare ensuite la position des différents pics expérimentaux avec les fréquences de résonance obtenues en résolvant le problème propre pour une sphère élastique. La levée de dégénérescence des résonances liée au support est minimisée en optant pour le support composé de 3 vis en Téflon.

4.2.2 Excitation sans contact par laser impulsif

Les ondes élastiques sont générées par un laser Nd-YAG impulsif Q-déclenché (modèle Minilite II, société Continuum). La longueur d'onde d'émission est de 1084 nm. Les caractéristiques du faisceau laser pour cette longueur d'onde sont :

- durée de l'impulsion : 5 à 7 ns²,
- diamètre faisceau laser : < 3 mm,

2. On choisit la valeur moyenne 6 ns pour l'ensemble des calculs.

- énergie par impulsion : 50 mJ,
- taux de répétition des impulsions : 1 - 15 Hz.

La cadence d'excitation est choisie de telle sorte que l'amplitude de la vitesse vibratoire de l'objet soit suffisamment atténuée dans le régime de ré-émission libre avant de soumettre l'objet à un nouvel impact laser.

La durée de l'impulsion laser Δt correspond à largeur à mi-hauteur de son profil d'intensité [Diels et al. 2006]. L'impulsion peut être modélisée par une gaussienne

$$f(t) = A e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\Delta t}{\sqrt{2\ln 2}}, \quad (4.3)$$

ou par une sécante hyperbolique

$$f(t) = A \operatorname{sech}\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\Delta t}{1,76}. \quad (4.4)$$

Les spectres de ces deux impulsions montrent une bande passante à -6 dB de

- 51,8 MHz pour le profil gaussien (Fig. 4.9),
- 39 MHz pour le profil en sécante hyperbolique (Fig. 4.10).

Il est important de noter que la bande passante à laquelle on a accès grâce à l'excitation par des impacts laser est très supérieure à celles proposées par l'appareil de mesure pour tous les calibres utilisés (Sous-section 4.2.3).

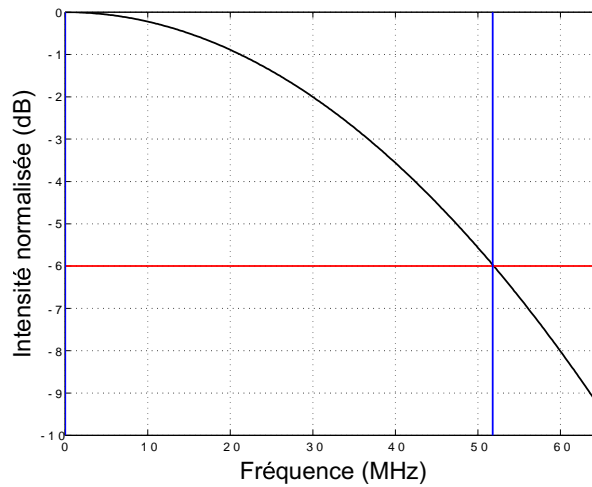


FIGURE 4.9 – Spectre de l'impulsion laser dans le cas d'un profil gaussien.

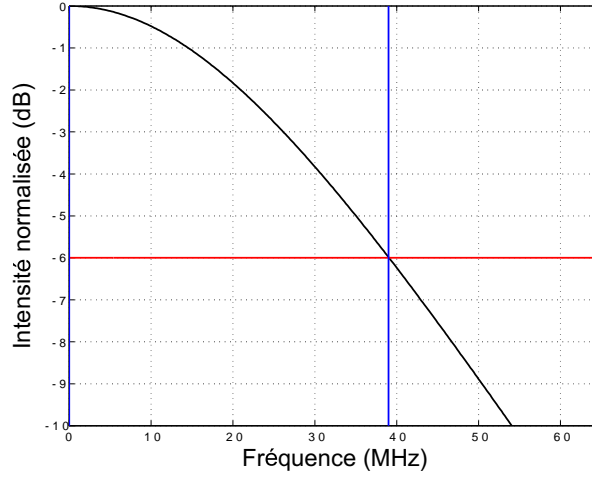


FIGURE 4.10 – Spectre de l'impulsion laser dans le cas d'un profil en sécante hyperbolique.

On estime que la densité de puissance lumineuse maximale $I_{\max} = \frac{E}{\Delta t S}$ ($E(J)$ l'énergie incidente, $\Delta t(s)$ la durée de l'impulsion laser, $S(m^2)$ la surface de l'impact laser) de notre laser est :

$$I_{\max} = \frac{50 \times 10^{-3}}{6 \times 10^{-9} \times \pi \times (1.5 \times 10^{-3})^2} \approx 118 \text{ MW.cm}^{-2}. \quad (4.5)$$

Nous sommes donc largement au dessus du seuil d'ablation estimé pour l'aluminium 2017A (Paragraphe 4.1.1.2). Mais il faut préciser qu'il est très difficile de connaître précisément ce seuil [Xeridat 2011] car cette formule ne prend pas en considération certains paramètres, comme par exemple la longueur d'onde incidente [Vladoiu et al. 2008].

Dans la suite, on étudie les modes résonants de sphéroïdes élastiques de forme oblate et prolata ainsi que l'onde de Rayleigh qui se propage sur leur surface. La génération de cette onde est favorisée en régime d'ablation (Paragraphe 4.1.1.4). On souhaite estimer l'altération de la surface des objets que l'on va utiliser. Pour cela, un sphéroïde « test » en aluminium 2017A est soumis aux mêmes conditions expérimentales que les mesures. L'objet est bombardé par 1000 impacts laser et l'état de la surface est ensuite observé au Microscope Électronique à Balayage (Figs. 4.11 et 4.12). Plus précisément, la zone bombardée et la zone de transition partie saine - partie bombardée sont visualisées respectivement sur les figures (4.11a) et (4.11b) avec deux facteurs de zoom différents, $\times 30$ et $\times 80$ respectivement.

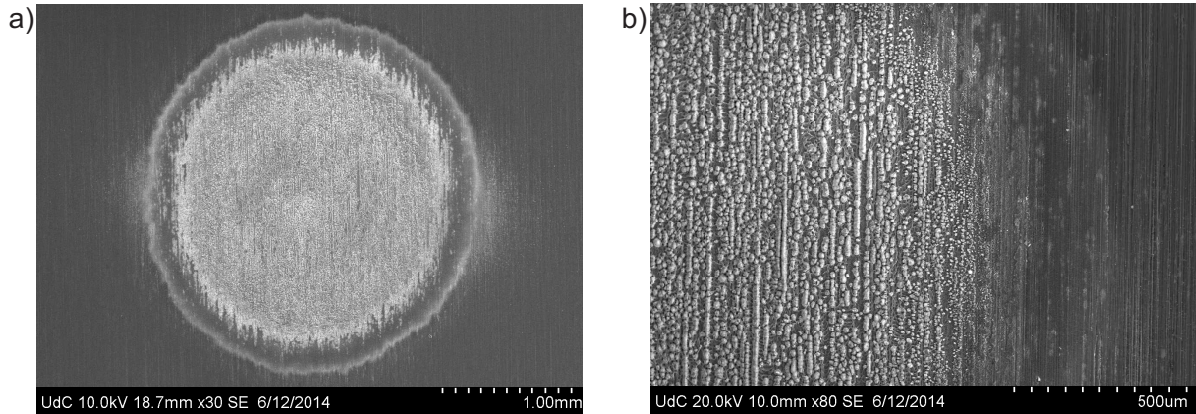


FIGURE 4.11 – Surface de l'objet observée au Microscope Électronique à Balayage. a) Zone bombardée zoom $\times 30$. b) Zone de transition partie saine-partie bombardée zoom $\times 80$.

La figure (4.12) présente un zoom $\times 700$ de la partie saine (Fig. 4.12a) et de la partie bombardée (Fig. 4.12b). À partir de cette figure, on estime la taille des rugosités à environ $100\text{ }\mu\text{m}$, soit une génération de défauts de l'ordre du $1/10\text{ mm}$, équivalente à la tolérance d'usinage des objets (Paragraphe 4.2.1.1). On note que ces défauts de surface ramenés à la taille des objets représentent une variation d'environ $0,01\%$ du diamètre moyen.

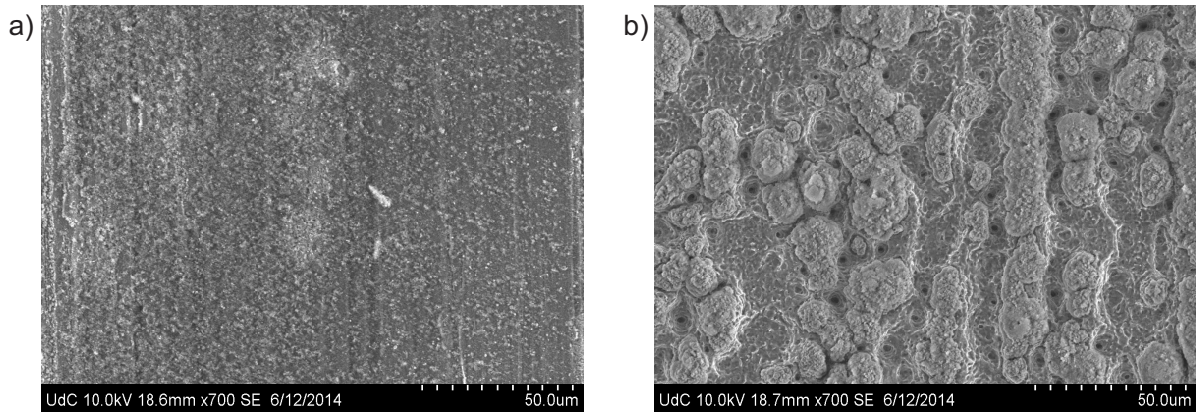


FIGURE 4.12 – Surface de l'objet observée au Microscope Électronique à Balayage zoom $\times 700$. a) Zone saine , b) Zone bombardée.

On observe que la surface de l'objet est légèrement altérée en régime d'ablation. On souhaite quantifier l'influence de cette altération sur les mesures effectuées dans le domaine fréquentiel. Pour cela, on compare les spectres des résonances obtenus en régime d'ablation et en régime thermoélastique (3% de l'énergie maximale du laser d'impact). On constate que les valeurs de résonance mesurées dans différentes gammes de fréquences sont identiques dans les deux régimes. Toutefois, en régime d'ablation, l'amplitude des pics de résonances est plus importante et le rapport signal/bruit est bien meilleur.

On en conclut que le régime d'ablation peut être utilisé pour réaliser notre étude, les défauts de surface générés dans ce régime n'engendrant pas de variations mesurables des valeurs de fréquences de résonance.

4.2.3 Mesure sans contact par vibrométrie laser

Le principe de la mesure sans contact a été présenté dans la sous-section 4.1.2. Nous utilisons la sonde optique OFV-505 développée par Polytec qui est composée d'un laser hélium-néon de longueur d'onde 633 nm et de puissance $< 1\text{ mW}$ dont la résolution est $0,2\frac{\mu\text{m}}{\text{s}}/\sqrt{\text{Hz}}$. La sonde est équipée d'un autofocus afin d'optimiser la focalisation et la distance minimum de visibilité maximale sonde-échantillon est de 530 mm . Des réglages sont à effectuer avant chaque série de mesures afin de s'assurer de l'horizontalité de l'échantillon vis à vis de la sonde, de son bon positionnement, d'une bonne focalisation du signal et d'une maximisation du rapport signal sur bruit de la sonde. Afin d'améliorer ce rapport, il est possible d'augmenter la quantité de signal lumineux réfléchi par la surface de l'échantillon en collant sur cette surface deux types d'adhésif rétro-réfléchissant³. Compte tenu de la courbure et de l'état de surface de nos échantillons, l'utilisation de ces adhésifs s'avère nécessaire. On moyenne également les signaux sur plusieurs acquisitions (on diminue la valeur du bruit selon la racine carrée du nombre d'acquisitions). La sonde propose différentes plages de mesures de vitesse, allant de $0,5$ à 2 m.s^{-1} , associées à différentes bandes passantes $[0 - 100\text{ kHz}]$; $[0 - 250\text{ kHz}]$; $[0 - 1\text{ MHz}]$; $[0 - 1,5\text{ MHz}]$; $[0 - 2,5\text{ MHz}]$. Ces

3. Un des adhésifs contient des micro-billes à l'intérieur, emprisonnées dans une colle transparente, qui agissent comme des catadioptrès. Il optimise le signal quelle que soit l'incidence.

bandes passantes sont largement couvertes par la bande passante générée par le signal d'excitation (Sous-section 4.2.2). On désigne par calibre la vitesse maximale mesurée associée à une bande passante donnée. Pour une bande passante donnée, on choisit le calibre ayant la plus petite vitesse afin d'augmenter le rapport signal sur bruit. Un filtre passe-haut de fréquence de coupure égale à 100 Hz est activé pour tous les calibres afin de s'affranchir des perturbations à 50 Hz générées par le réseau électrique. Selon les calibres, un filtre passe-bas de fréquence de coupure égale à 1,5 MHz peut être également activé.

Le déclenchement de la mesure ($t = 0$ s) est synchronisé avec l'impact laser. On note néanmoins que l'acquisition du signal est décalée d'un temps Δt , qui correspond à un retard généré par le décodeur de vitesse. Ce retard diffère selon les calibres utilisés.

Afin d'étudier l'influence du dispositif interférométrique sur les mesures effectuées, on réalise des mesures « à vide » (sans excitation de l'objet) pour les différents calibres. On note la présence de pics fréquentiels parasites (*spurious peaks*), dont le premier apparaît à 25 kHz, qui sont dus au système interférométrique de la tête optique (Fig. 4.13). La fréquence de ces pics fluctue légèrement dans le temps et leur amplitude peut donc être facilement atténuée en réalisant des moyennes temporelles. On vérifie ainsi que les mesures ne sont pas biaisées. De plus, ces mesures « à vide » nous permettent d'estimer l'évolution du niveau de bruit dans la bande de fréquence utilisée (Fig. 4.13).

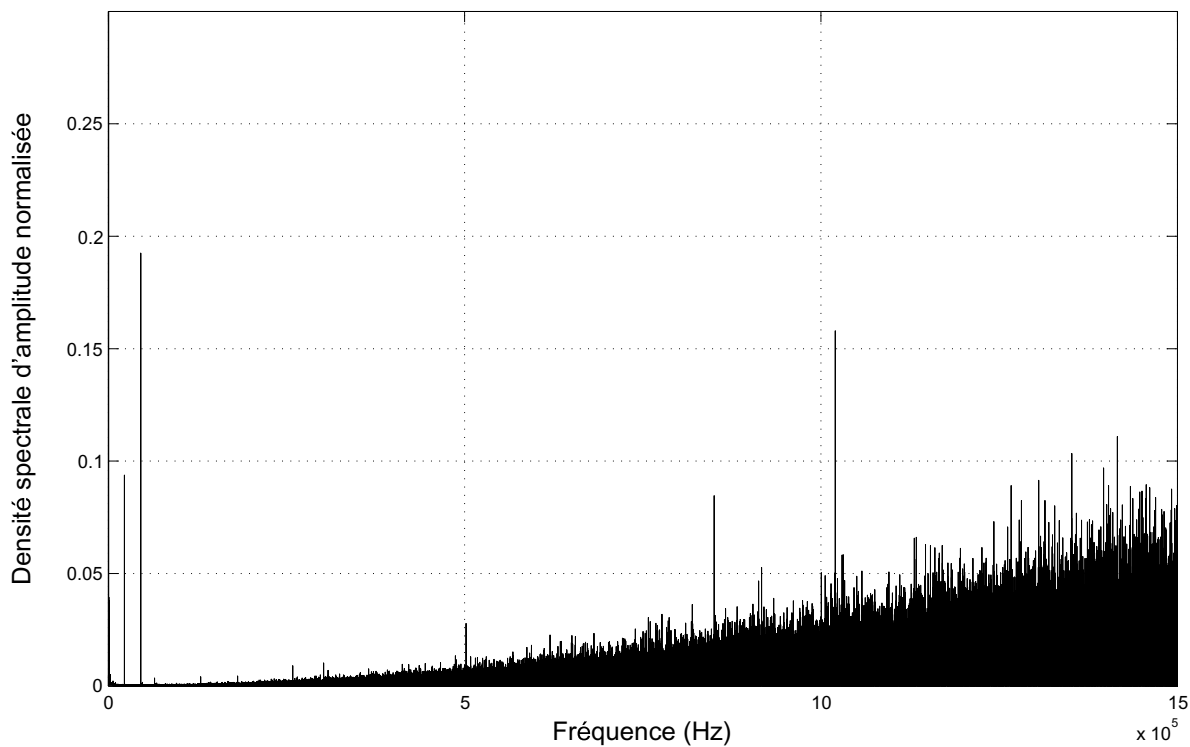


FIGURE 4.13 – Spectre de Fourier d'une mesure « à vide » sans moyennage temporel pour le calibre $50 \frac{\text{mm}}{\text{s}}/\text{V}$ pouvant mesurer des amplitudes de vitesse jusqu'à $0,5 \text{ m.s}^{-1}$ dans une gamme de fréquences allant jusqu'à 1,5 MHz.

4.2.4 Acquisition et traitement des données

L'acquisition et l'échantillonnage des signaux temporels sont réalisés à l'aide d'un oscilloscope numérique 12 bits (modèle HDO 6054, société Lecroy). La fréquence d'échantillonnage est fixée en fonction du calibre utilisé sur le vibromètre. Cet appareil nous permet de réaliser des moyennes sur plusieurs acquisitions et d'observer la FFT du signal en temps réel avec

différentes fenêtres de pondération. Les données temporelles sont enregistrées au format MATLAB pour être

- visualisées sur ordinateur ;
- traitées par transformée de Fourier rapide pour obtenir des spectres fréquentiels.

Chaque pic du spectre correspond à une fréquence propre de vibration de l'objet étudié. La valeur de chaque pic (résonance) et leur nombre sont enregistrés en vue de tracer le spectre des longueurs des orbites périodiques.

Détection expérimentale des résonances

Pour obtenir les orbites périodiques, nous devons détecter les résonances sur les spectres expérimentaux s'étendant jusqu'à 1 MHz. Les valeurs des résonances correspondent à la position des pics qui apparaissent sur ces spectres. Les pics sont des maxima locaux que nous détectons numériquement avec MATLAB et qui doivent satisfaire les critères suivants pour être qualifiés de résonances :

1. l'amplitude absolue de tous les maxima doit être supérieure à un seuil que l'on fixe en fonction du niveau de bruit,
2. la largeur fréquentielle entre deux maxima consécutifs doit être supérieure à un écartement moyen diminuant avec la fréquence,
3. l'amplitude relative des maxima (écart entre un minimum et un maximum consécutifs) doit respecter un écart minimum en amplitude.

Afin d'optimiser la détection, nous effectuons celle-ci par bande de fréquence pour tenir compte de l'évolution du niveau de bruit ainsi que de la prolifération des résonances en haute fréquence. La difficulté réside alors dans la multiplication du nombre de paramètres que nous devons caler afin de réaliser, de façon optimale, la détection des résonances. Sur la figure 4.14, on présente un exemple de détection expérimentale des résonances dans une fenêtre fréquentielle centrée autour de 580 kHz.

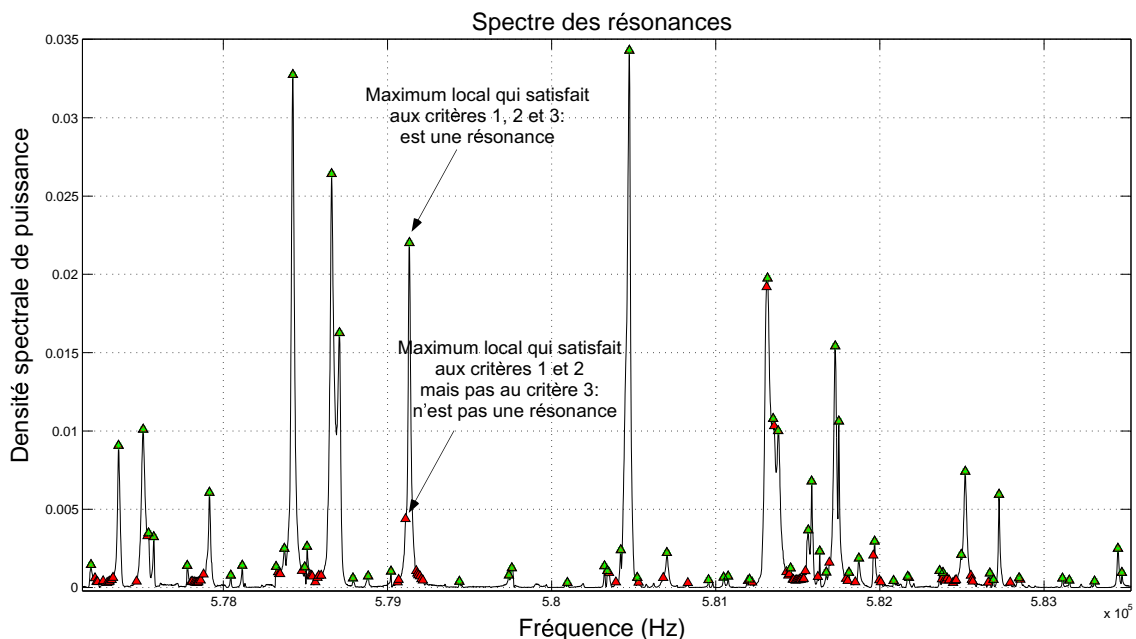


FIGURE 4.14 – Détection expérimentale des résonances.

4.3 ÉTUDE DANS LE DOMAINE TEMPOREL

On se propose d'étudier les ondes qui se propagent à l'interface solide/air. En particulier, on s'intéresse à l'onde de Rayleigh. Ce type d'interface offre l'avantage de pouvoir étudier le signal sur un grand nombre de tours de propagation de cette onde, celle-ci étant très peu atténuée.

D'après le principe de Fermat et les observations faites dans le chapitre 2, on souhaite mettre en évidence deux trajets extrémaux parcourus par l'onde de Rayleigh en géométrie sphéroïdale :

- un trajet circulaire dans le plan équatorial sur la surface du sphéroïde (Onde de Rayleigh R_c de période T_c)
 - ◊ trajet minimal pour un sphéroïde prolata,
 - ◊ trajet maximal pour un sphéroïde oblate ;
- un trajet elliptique dans le plan méridien sur la surface du sphéroïde (Onde de Rayleigh R_e de période T_e)
 - ◊ trajet maximal pour un sphéroïde prolata,
 - ◊ trajet minimal pour un sphéroïde oblate.

La figure (4.15) présente ces différents trajets.

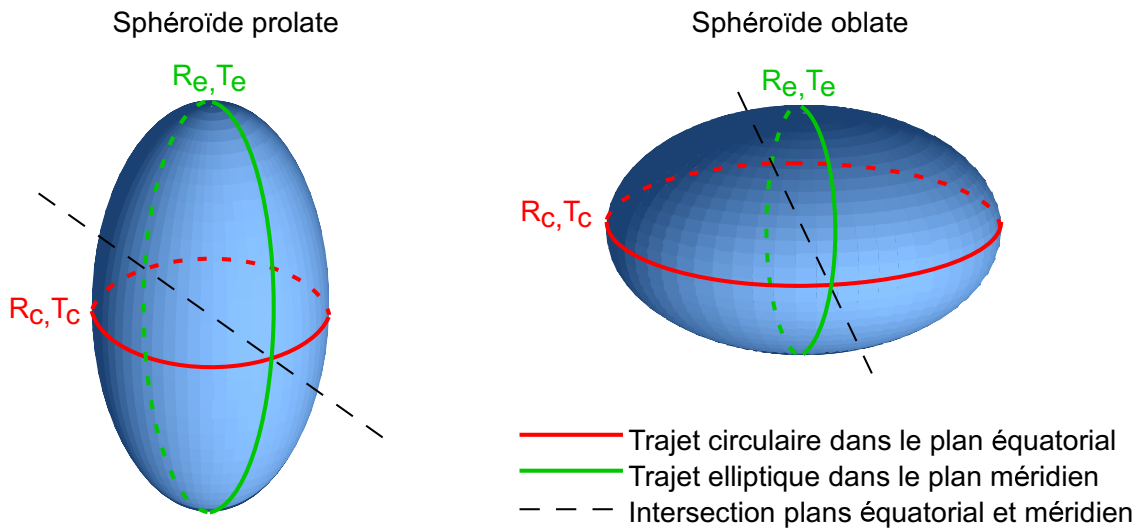


FIGURE 4.15 – Trajets parcourus par l'onde de Rayleigh en géométrie sphéroïdale.

L'observation de l'onde de Rayleigh se fait généralement dans deux configurations : émission-détection à 90° ou à 180° , détaillées respectivement dans les sous-sections 4.3.1 et 4.3.2. Dans les deux cas, les échos observés correspondent à la propagation des ondes sur la surface du sphéroïde, qui divergent depuis le point d'impact pour converger vers le point opposé, et ainsi de suite. Dans le cas de la géométrie sphéroïdale, il existe en fait plusieurs configurations conduisant à l'observation des trajets parcourus par l'onde de Rayleigh, selon le positionnement des sphéroïdes dans le plan horizontal formé par les lasers d'excitation et de mesure. Ces configurations sont résumées dans le tableau (4.2). Dans ce tableau, on note en vert celles qui permettent l'observation des deux trajets, c'est à dire lorsque l'émission et la détection se font à 180° selon l'intersection des plans équatorial et méridien, i.e. le petit axe pour un sphéroïde prolata, le grand axe pour un sphéroïde oblate (Fig. 4.15). Les croix rouges correspondent à des configurations non réalisables physiquement.

Les expérimentations sont effectuées sur les sphéroïdes P_4 , P_5 , O_4 et O_5 (Tab. 4.1). Le support utilisé nous permet de positionner les sphéroïdes oblates tels que leur plan équatorial soit dans le plan des lasers d'excitation et de mesure et les sphéroïdes prolates tels que

TABLE 4.2 – Configurations possibles pour observer les ondes de Rayleigh.

		Émission-détection 90°		Émission-détection 180°	
		Émission		Émission	
		grand axe	petit axe	grand axe	petit axe
Sphéroïde	Plan équatorial				
Oblate	// plan lasers	Détection grand axe	×	Détection grand axe (A)	×
Oblate	⊥ plan lasers	Détection petit axe	Détection grand axe	Détection grand axe (B)	Détection petit axe
Prolate	// plan lasers	×	Détection petit axe	×	Détection petit axe (C)
Prolate	⊥ plan lasers	Détection petit axe	Détection grand axe	Détection grand axe	Détection petit axe (D)

TABLE 4.3 – Configurations retenues et trajets mesurés pour les ondes de Rayleigh.

Sphéroïde	Émission-détection 90°	Trajets	Émission-détection 180°	Trajets
Oblate	grand axe-grand axe	circulaire	grand axe-grand axe	circulaire et elliptique
Prolate	petit axe-grand axe	elliptique	petit axe-petit axe	circulaire et elliptique

leur plan équatorial soit perpendiculaire au plan des lasers. Ceci nous conduit à choisir la configuration (A) pour les sphéroïdes oblates et la configuration (D) pour les sphéroïdes prolates afin d'observer les deux trajets parcourus par l'onde de Rayleigh. Pour observer un seul trajet, nous optons pour la configuration émission-détection à 90° car c'est la seule configuration possible compte tenu du positionnement des sphéroïdes oblates. Cette même configuration sera retenue pour observer un seul trajet de l'onde de Rayleigh sur les sphéroïdes prolates. Le tableau (4.3) récapitule les configurations expérimentales retenues ainsi que les différents trajets parcourus par les ondes de Rayleigh que l'on mesure dans chaque cas.

Le tableau (4.4) présente les temps de parcours (périodes temporelles théoriques) de l'onde de Rayleigh selon les trajets circulaire dans le plan équatorial et elliptique dans le plan méridien calculés avec $c_R = 2911,07 \text{ m.s}^{-1}$ (Eq. 2.47). Ces sphéroïdes ont été sélectionnés car ils sont suffisamment déformés et les périodes temporelles des ondes de Rayleigh parcourant les trajets circulaire et elliptique sont suffisamment séparées pour être mesurées sans ambiguïté. On ne présente dans la suite que les résultats expérimentaux pour le sphéroïde prolates P_4 et le sphéroïde oblate O_5 .

Du point de vue de l'acquisition expérimentale, les mesures sont effectuées pour différents calibres et on retient finalement le calibre $50 \frac{\text{mm}}{\text{s}}/\text{V}$ pouvant mesurer des amplitudes de vitesse jusqu'à $0,5 \text{ m.s}^{-1}$ dans une gamme de fréquences allant jusqu'à 1,5 MHz. Les signaux sont moyennés sur 100 acquisitions (impacts laser) puis échantillonnés à 5 MHz. Pour le calibre choisi, le début effectif de la mesure est retardé de $\Delta t = 8,16 \mu\text{s}$ (Sous-section 4.2.3). Ce retard est à prendre en compte pour déterminer les périodes temporelles de l'onde de Rayleigh.

TABLE 4.4 – Périodes temporelles théoriques de l'onde de Rayleigh selon le trajet circulaire (T_c) et selon le trajet elliptique (T_e) pour les sphéroïdes P_4 , P_5 , O_4 et O_5 .

Périodes temporelles en μs	P_4	P_5	O_4	O_5
T_c	75,54	64,75	99,70	109,21
T_e	95,08	113,69	83,11	83,94

4.3.1 Configuration émission-détection à 90° pour les sphéroïdes P_4 et O_5

On considère dans un premier temps le signal temporel acquis lorsque le laser sonde se trouve à 90° par rapport au laser d'excitation. On se propose de mettre en évidence les trajets de l'onde de Rayleigh pour les sphéroïdes P_4 et O_5 dans cette configuration. La figure 4.16 présente les configurations expérimentales pour ces sphéroïdes et montre également les temps d'arrivée des ondes de Rayleigh détectées sur le premier tour de propagation.

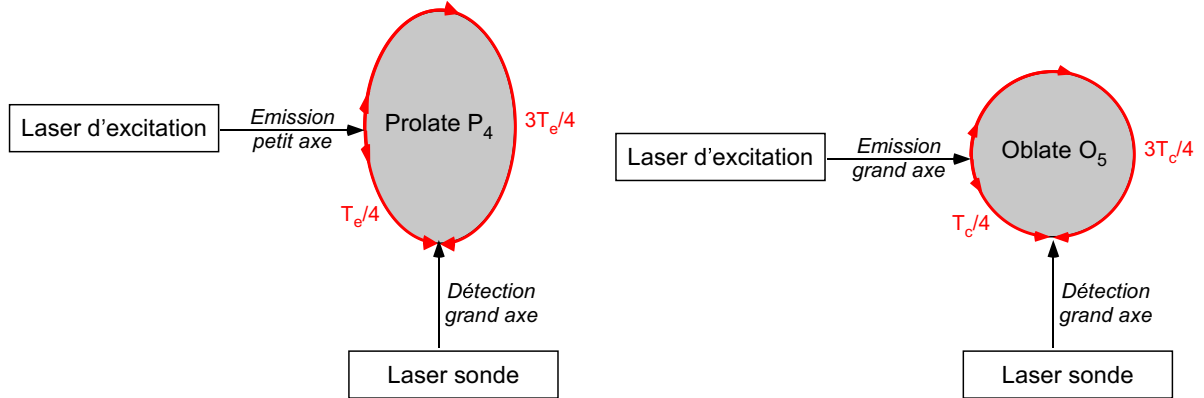


FIGURE 4.16 – Montage en configuration émission-détection à 90° pour les sphéroïdes P_4 et O_5 .

On présente en figures (4.17) et (4.18) les signaux temporels correspondant à N tours de l'onde de Rayleigh pour les sphéroïdes P_4 et O_5 respectivement. On détecte, comme prévu, le trajet elliptique parcouru par l'onde de Rayleigh pour P_4 et le trajet circulaire pour O_5 . On constate également que l'amplitude du signal est encore importante après un temps de propagation de 3 ms. Expérimentalement, on mesure, en moyennant sur plusieurs périodes observables, $T_e(P_4) = 94,74 \mu s$ et $T_c(O_5) = 108,69 \mu s$. Ces résultats sont en très bon accord avec les données du tableau (4.4) (0,5 % d'erreur relative).

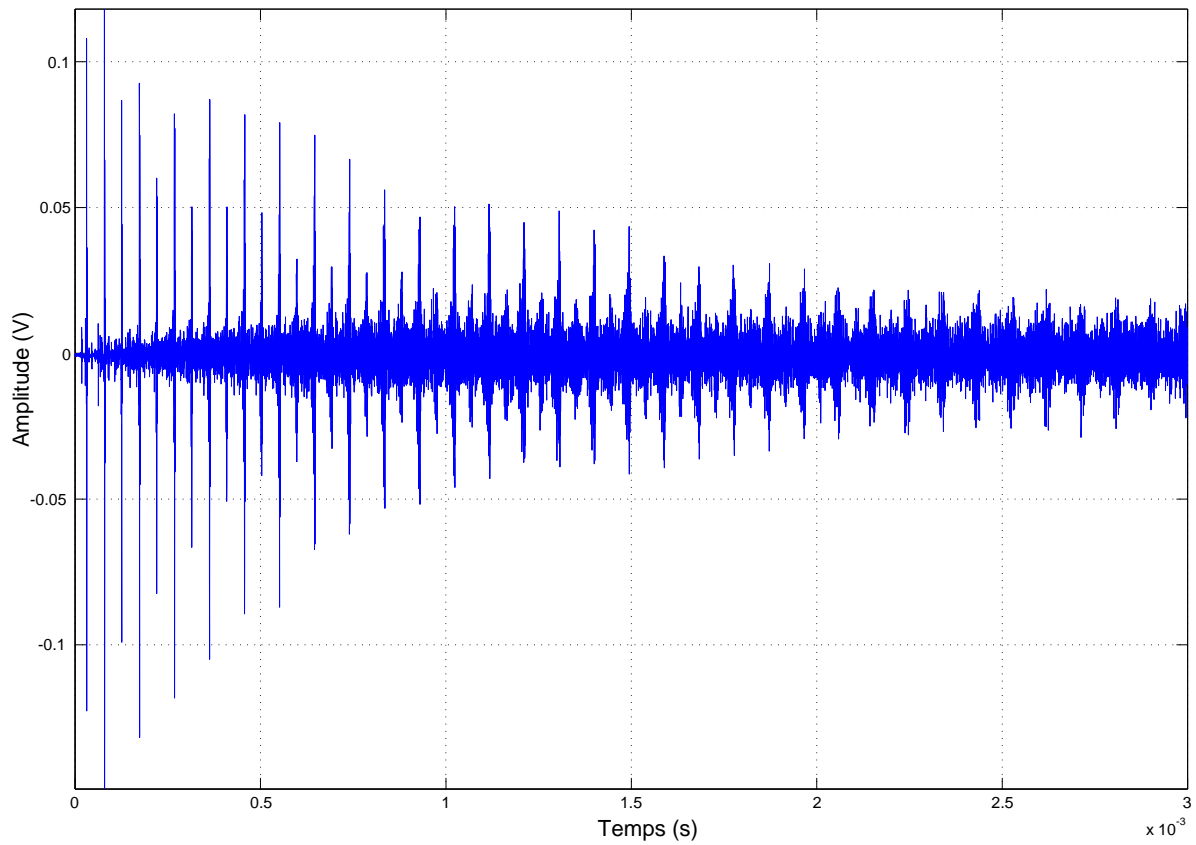


FIGURE 4.17 – Signal temporel P_4 sur N tours de propagation, émission petit axe - détection grand axe 90° .

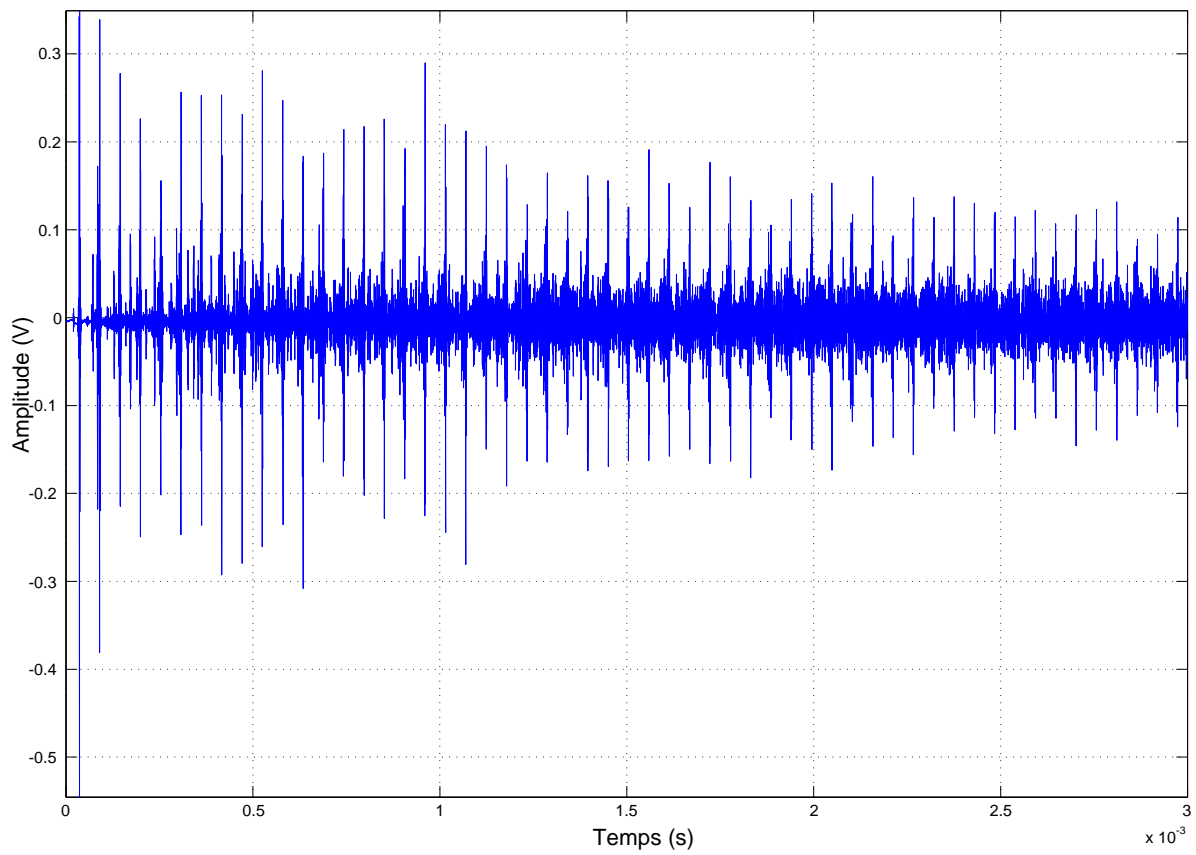


FIGURE 4.18 – Signal temporel O_5 sur N tours de propagation, émission grand axe - détection grand axe 90° .

On analyse maintenant le signal sur le premier tour de propagation sur les figures (4.19) et (4.20). On met clairement en évidence que l'onde de Rayleigh R_i (R_e pour P_4 et R_c pour O_5) est d'abord détectée au temps $T_i/4$, où T_i est la période temporelle de révolution (T_e pour P_4 et T_c pour O_5), décalée de $\Delta t = 8,16 \mu s$ (temps de retard engendré par le dispositif de mesure). L'onde de Rayleigh est ensuite détectée à $3T_i/4$. Plus précisément, l'appareil détecte dans un premier temps un quart du trajet parcouru par l'onde de Rayleigh dans un sens puis les trois quarts du trajet parcouru par la même onde, mais dans le sens opposé (Fig. 4.16). Ce zoom sur le premier tour de propagation met aussi en évidence le bon rapport signal/bruit et on détecte l'onde de tête aux environs de $9,6 \mu s$ pour P_4 et $12 \mu s$ pour O_5 [Graff 1975, Achenbach 1975] et des ondes de galeries à échos. On observe ensuite des ondes régulièrement espacées de $T/2$ qui se succèdent (Figs. 4.21 et 4.22) et de nouveau des ondes de galerie à échos entre chaque période de l'onde de Rayleigh.

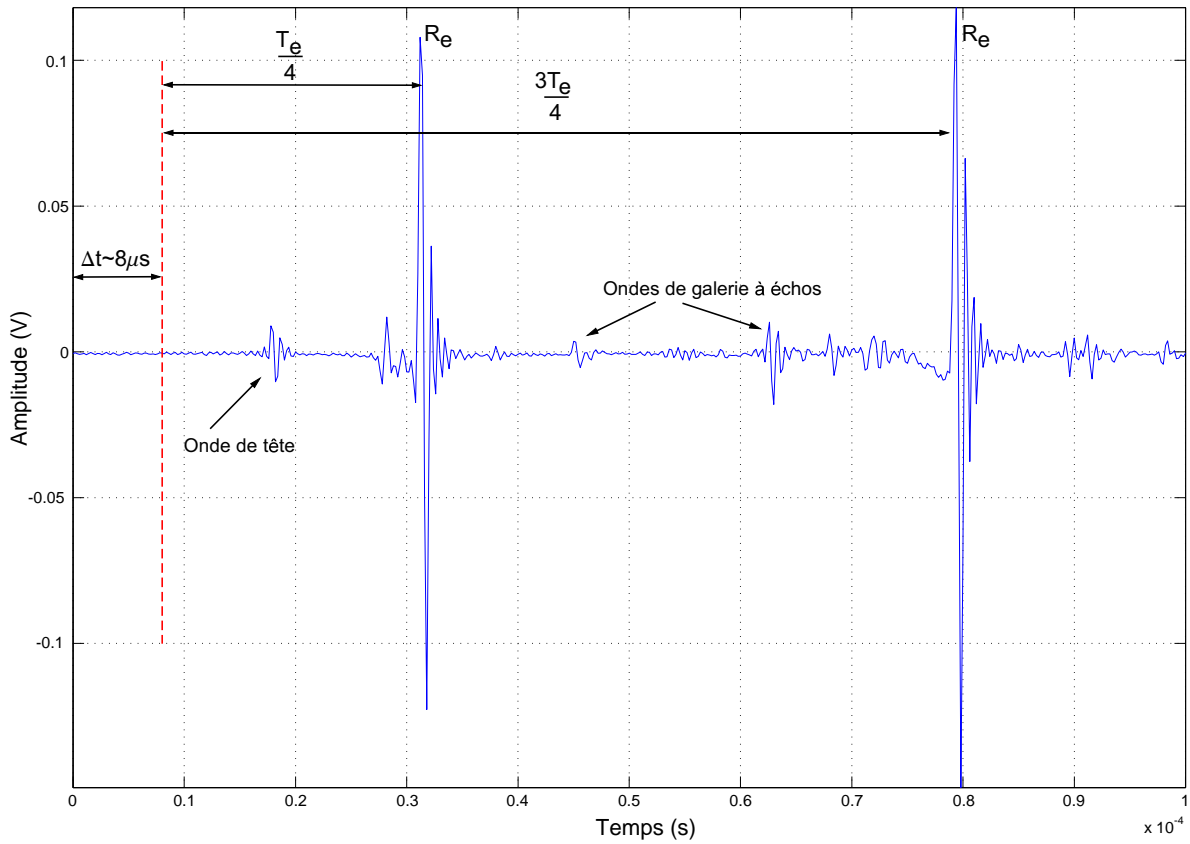


FIGURE 4.19 – Signal temporel P_4 sur le premier tour de propagation, émission petit axe - détection grand axe 90° .

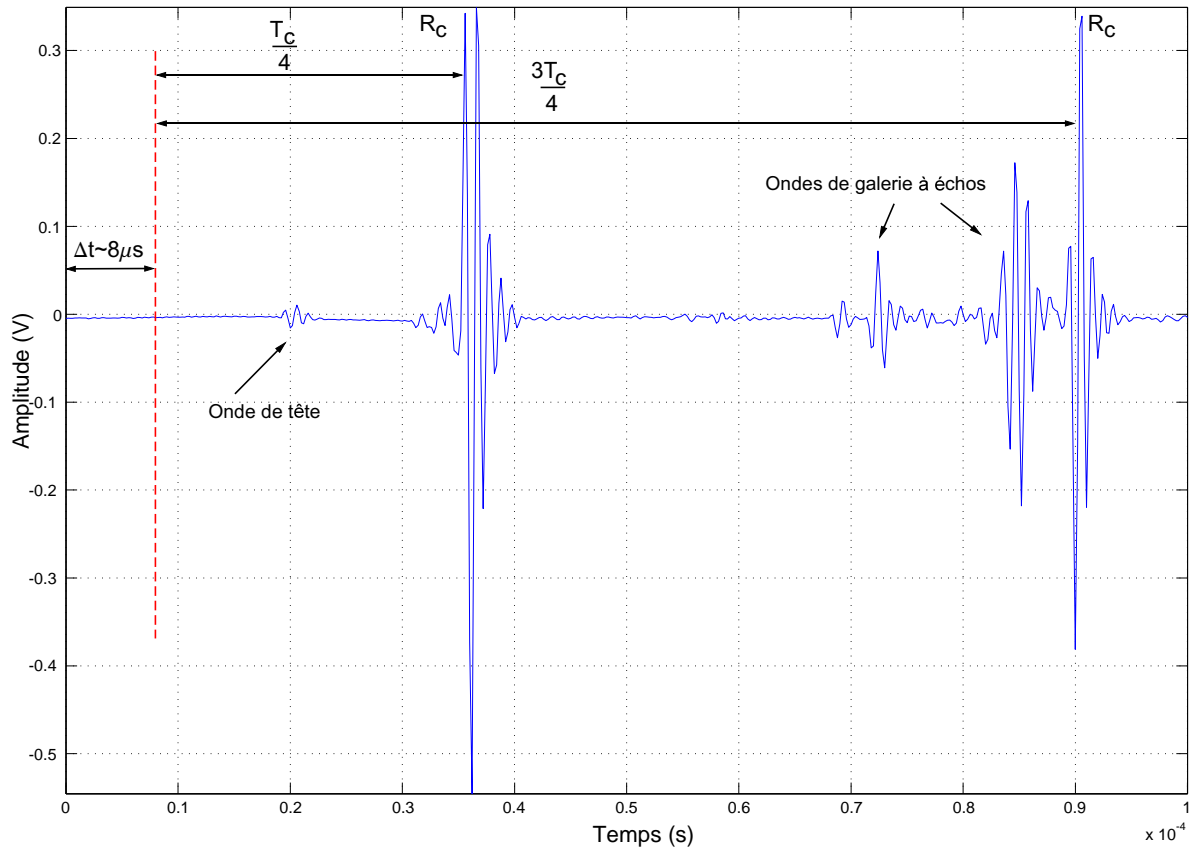


FIGURE 4.20 – Signal temporel O_5 sur le premier tour de propagation, émission grand axe - détection grand axe 90° .

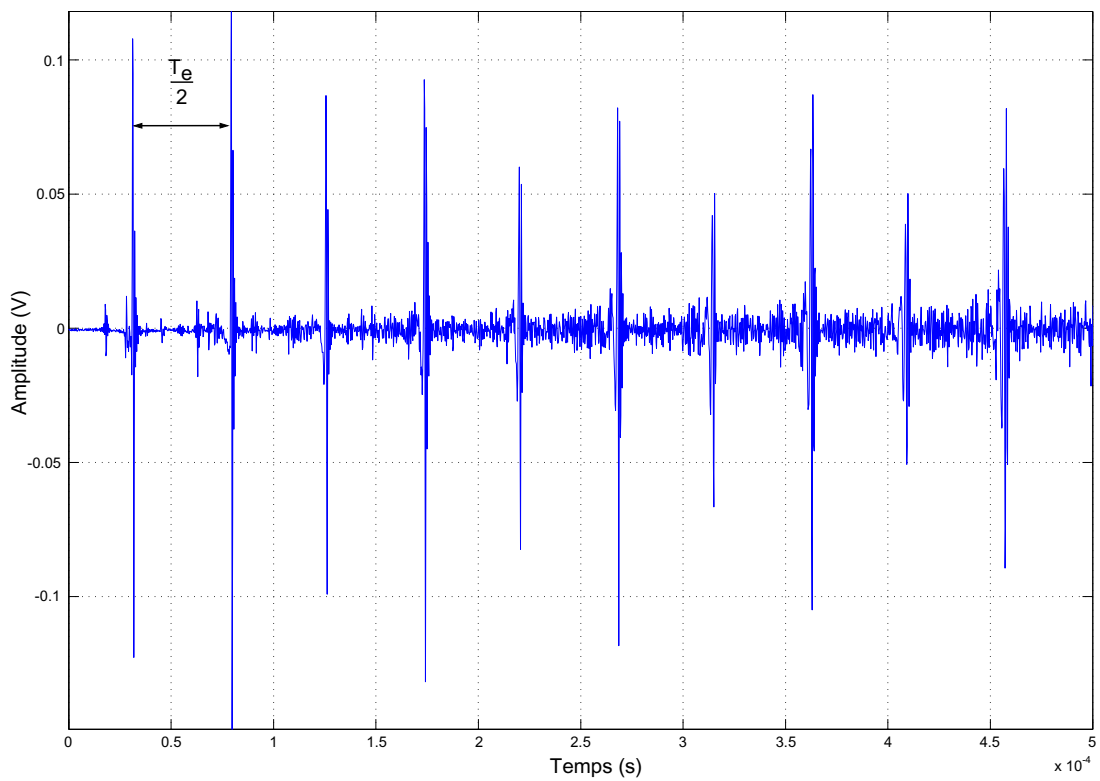


FIGURE 4.21 – Signal temporel P_4 sur les premiers tours de propagation, émission petit axe - détection grand axe 90° .

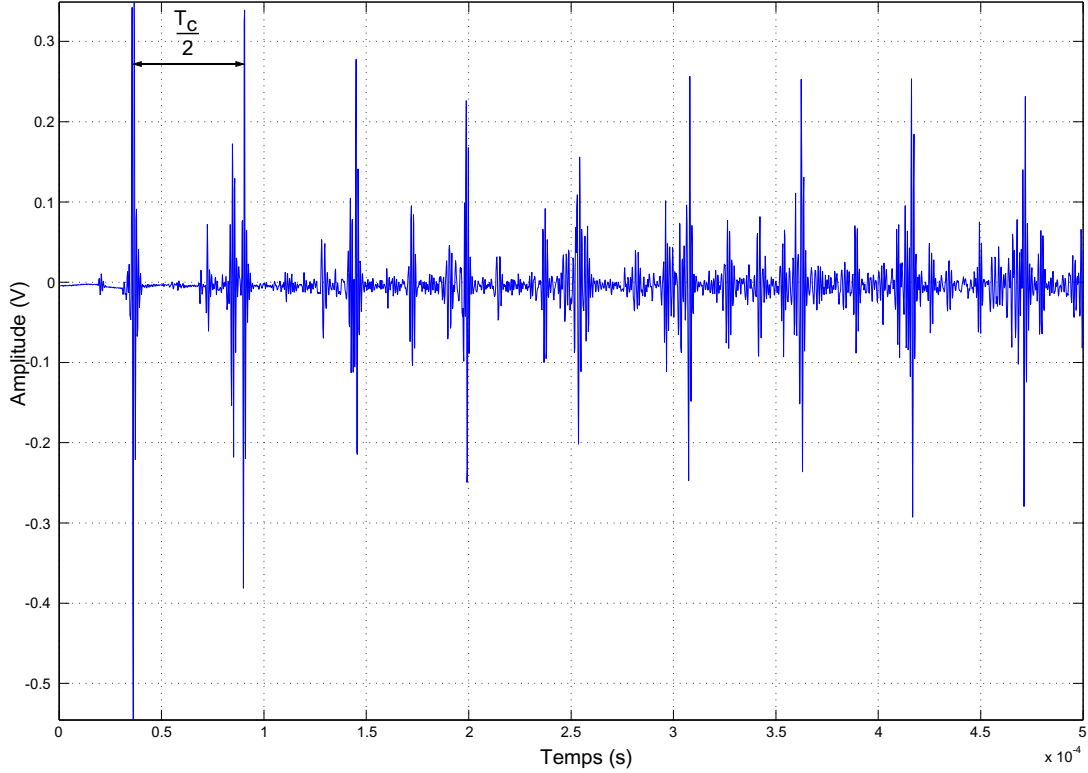


FIGURE 4.22 – Signal temporel O_5 sur les premiers tours de propagation, émission grand axe - détection grand axe 90° .

4.3.2 Configuration émission-détection à 180° pour les sphéroïdes P_4 et O_5

On place maintenant le laser sonde à 180° par rapport au laser d'excitation. Dans cette configuration, les ondes se propagent et interfèrent constructivement au point de mesure. Les ondes suivent des trajets opposés mais symétriques, contrairement au montage précédent (Sous-section 4.3.1). On se propose de mettre en évidence les deux trajets circulaire et elliptique de l'onde de Rayleigh pour les sphéroïdes P_4 et O_5 . La figure (4.23) présente les configurations expérimentales utilisées pour ces sphéroïdes et montrent également les temps d'arrivée des ondes de Rayleigh détectées sur le premier tour de propagation.

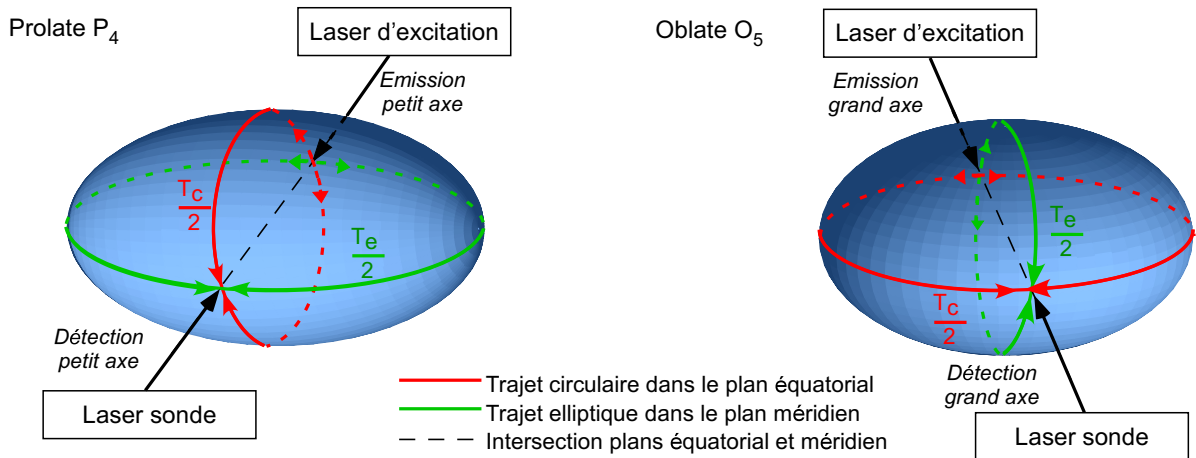


FIGURE 4.23 – Montage en configuration émission-détection à 180° pour les sphéroïdes P_4 et O_5 .

On présente en figures (4.24) et (4.25) les signaux temporels correspondant à N tours de propagation des ondes de Rayleigh pour les sphéroïdes P_4 et O_5 respectivement. On dis-

tingue, en observant le début du signal, la propagation de ces deux ondes. On constate, une fois encore, que l'amplitude du signal est encore importante après un temps de propagation de 3 ms.

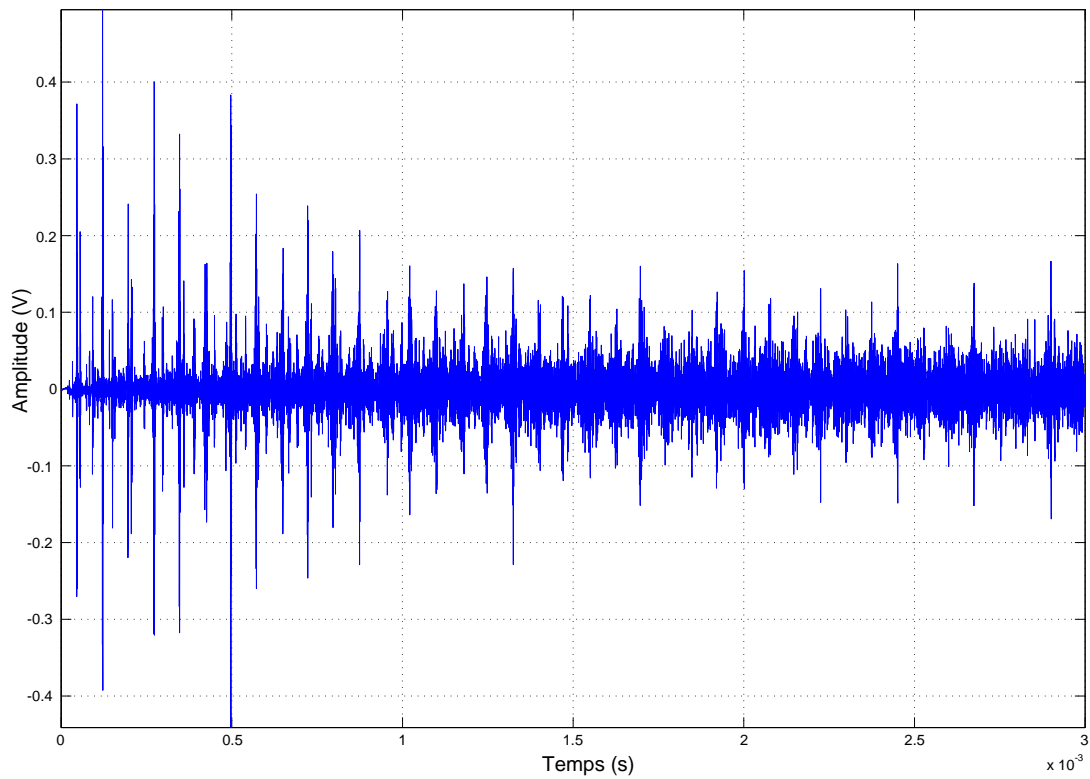


FIGURE 4.24 – Signal temporel P_4 sur N tours de propagation, émission petit axe - détection petit axe 180° .

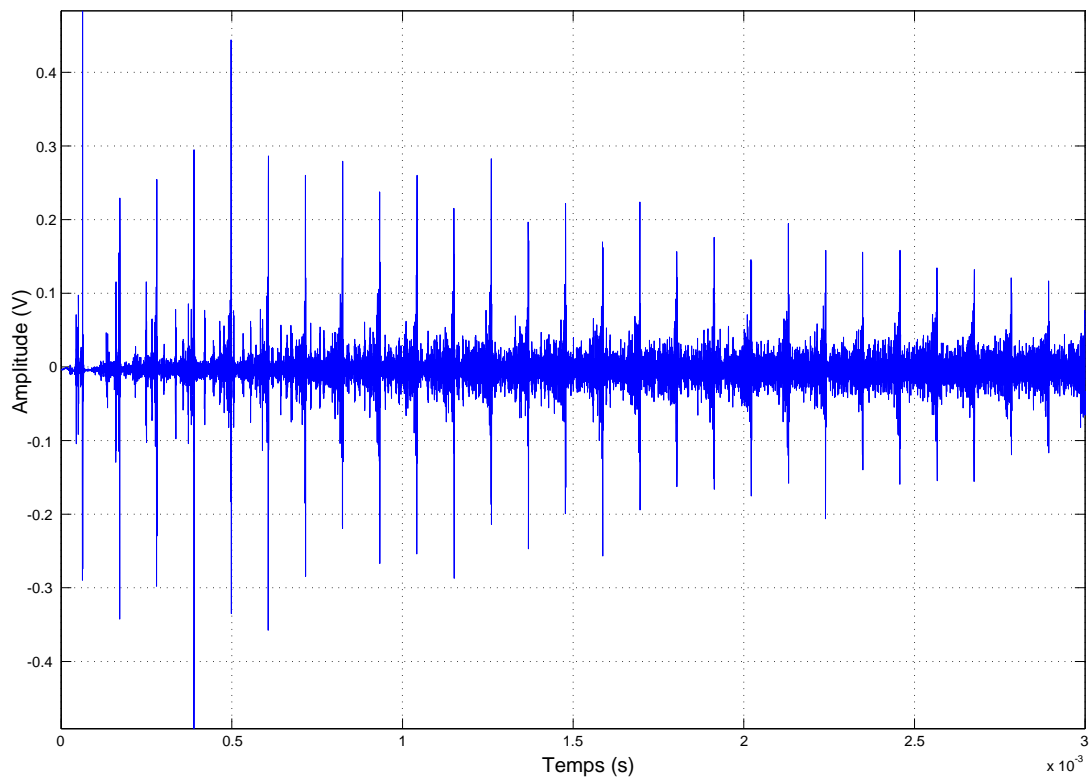


FIGURE 4.25 – Signal temporel O_5 sur N tours de propagation, émission grand axe - détection grand axe 180° .

En observant le signal sur le premier tour de propagation sur les figures (4.26) et (4.27), on constate l'arrivée de deux ondes de Rayleigh qui arrivent aux temps

- $T_c/2$ puis $T_e/2$ pour P_4 ,
- $T_e/2$ puis $T_c/2$ pour O_5 ,

décalées une fois encore de $\approx 8 \mu s$. On détecte le second tour effectué par ces ondes de Rayleigh aux temps

- $3T_c/2$ puis $3T_e/2$ pour P_4 ,
- $3T_e/2$ puis $3T_c/2$ pour O_5 .

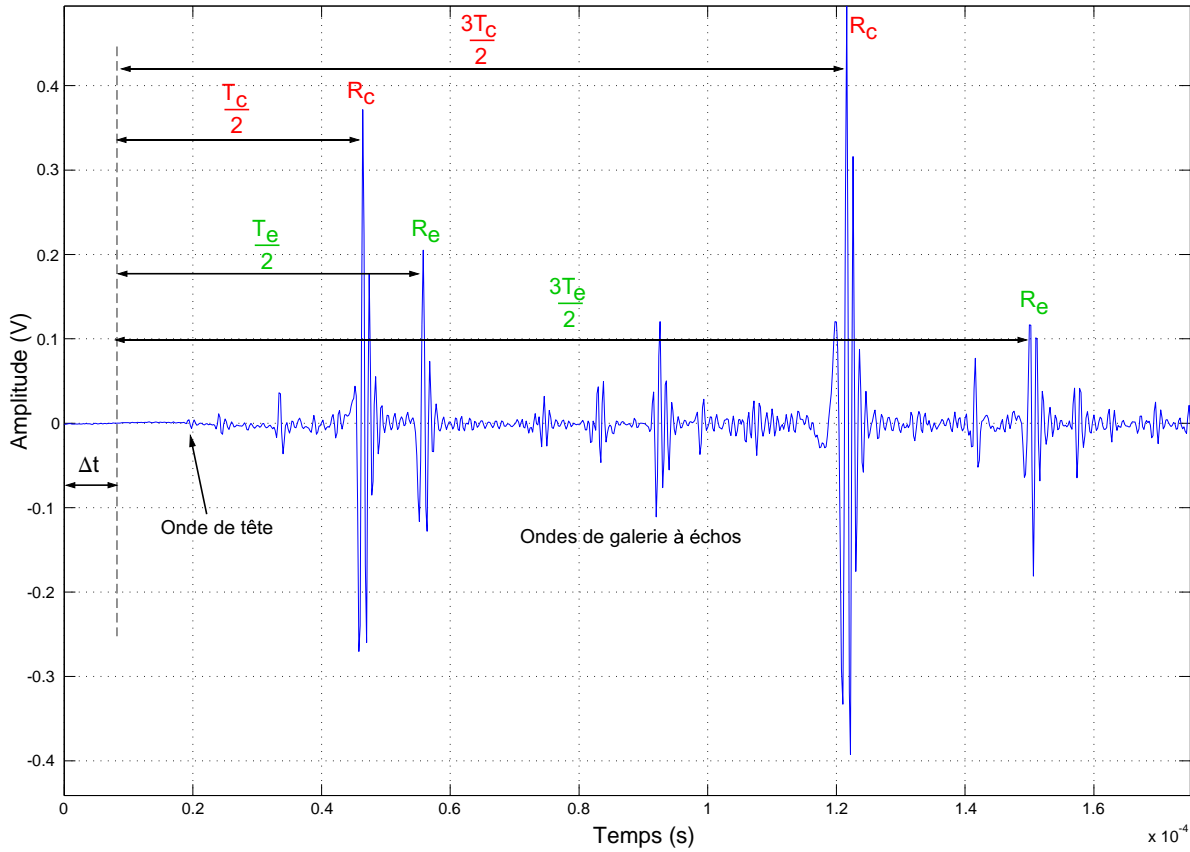


FIGURE 4.26 – Signal temporel P_4 sur le premier tour de propagation, émission petit axe - détection petit axe 180° .

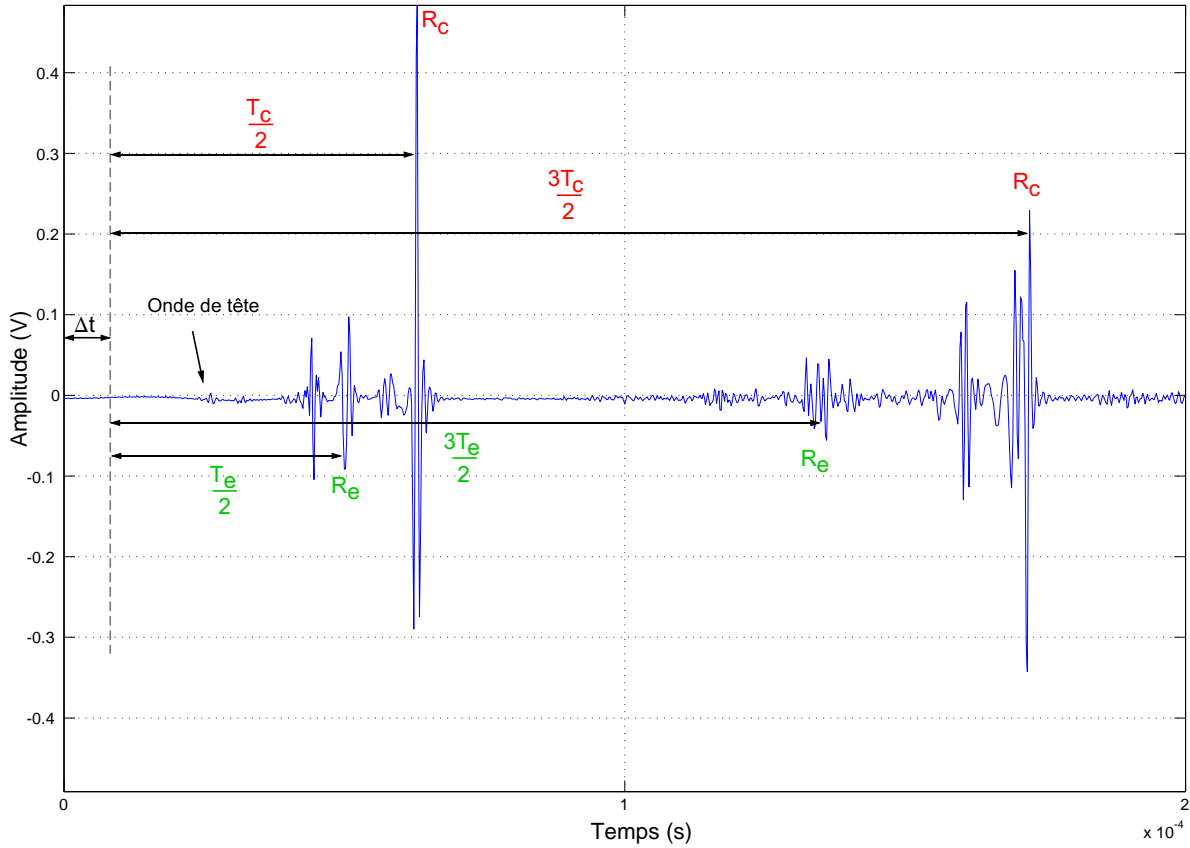


FIGURE 4.27 – Signal temporel O_5 sur le premier tour de propagation, émission grand axe - détection grand axe 180° .

Ce zoom sur le premier tour de propagation met aussi en évidence le bon rapport signal/bruit et on détecte l'onde de tête aux environs de $12 \mu\text{s}$ pour P_4 et $16,7 \mu\text{s}$ pour O_5 [Graff 1975, Achenbach 1975]. En analysant le signal sur les premiers tours de propagation (Figs. 4.28 et 4.29), on observe ensuite des ondes régulièrement espacées de T_e et T_c qui se succèdent pour chacun des sphéroïdes. On mesure alors expérimentalement, en moyennant sur les périodes observables

- $T_c = 75,14 \mu\text{s}$ et $T_e = 94,62 \mu\text{s}$ pour P_4 ,
- $T_e = 83,33 \mu\text{s}$ et $T_c = 108,69 \mu\text{s}$ pour O_5 ,

en très bon accord avec les résultats théoriques du tableau (4.4) (0,5 % d'erreur relative). On observe également des ondes de galerie à échos entre chaque période des ondes de Rayleigh. On remarque enfin que l'amplitude de l'onde de Rayleigh qui se propage sur le trajet elliptique du sphéroïde oblate est fortement atténuée. Ce trajet est caractérisé par une diminution importante du rayon de courbure lorsqu'il coupe perpendiculairement le cercle équatorial, et l'atténuation de l'onde de Rayleigh sur une surface courbe est d'autant plus importante que le rayon de courbure est faible [Graff 1975]. Cette atténuation est également visible sur les signaux temporels associés au sphéroïde prolate P_4 , mais moins importante que pour le sphéroïde oblate O_5 . En effet, la courbure sur le trajet elliptique est plus forte pour O_5 .

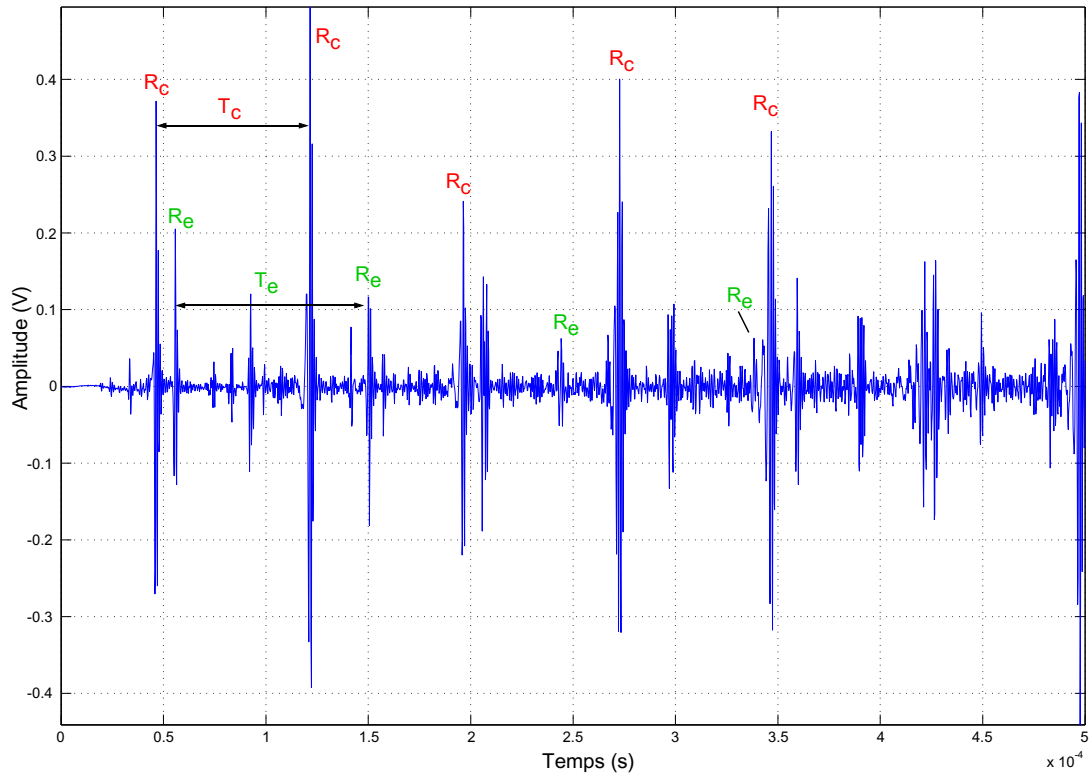


FIGURE 4.28 – Signal temporel P_4 sur les premiers tours de propagation, émission petit axe - détection petit axe 180° .

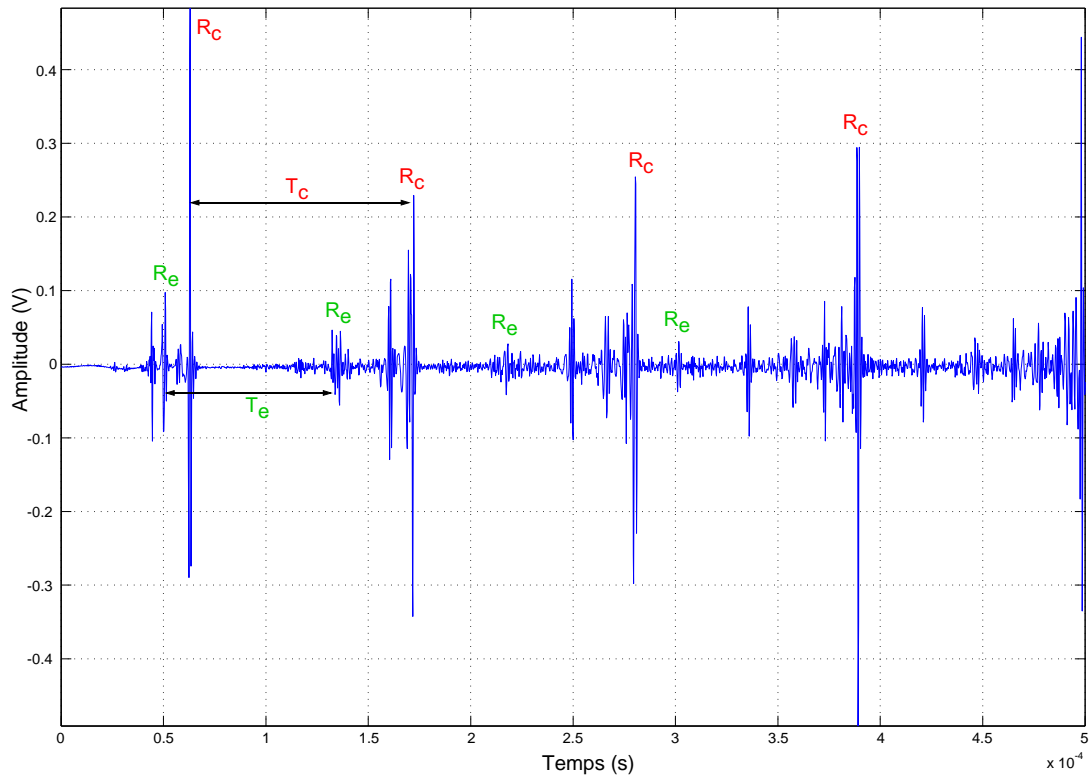


FIGURE 4.29 – Signal temporel O_5 sur les premiers tours de propagation, émission grand axe - détection grand axe 180° .

4.4 ÉTUDE DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL

Cette section est consacrée à l'étude expérimentale des résonances. Plus précisément, on s'intéresse à la levée de dégénérescence qui se produit au cours de la transition de la sphère vers le sphéroïde et aux spectres des longueurs des orbites périodiques.

Pour l'étude dans le domaine fréquentiel, nous retenons le calibre $20 \frac{\text{mm}}{\text{s}}/\text{V}$ pouvant mesurer des amplitudes de vitesse jusqu'à $0,2 \text{ m.s}^{-1}$ dans une gamme fréquentielle allant jusqu'à 1 MHz. Les signaux temporels sont moyennés sur 100 acquisitions (impacts laser) puis échantillonnés à 5 MHz. Les spectres des résonances sont obtenus en calculant la FFT des signaux temporels pondérés par une fenêtre de Hanning centrée en $t = 0$.

4.4.1 Spectre des résonances et levée de dégénérescence

On se propose de mettre en évidence la levée de dégénérescence des résonances liée à la brisure de la symétrie sphérique. En termes de théorie des groupes, la transition de la sphère vers le sphéroïde correspond à la brisure de symétrie $O(3) \rightarrow \mathcal{D}_{\infty h}$ (Sous-section 1.2.2). Sur le plan expérimental, la symétrie sphérique est brisée en sélectionnant trois sphéroïdes de chaque type, oblate et prolata, d'excentricités croissantes, décrits dans le paragraphe 4.2.1.1. Pour observer la levée de dégénérescence, les modes résonants de la sphère sont suivis à mesure que la déformation vers le sphéroïde augmente, tout en conservant un volume constant. Ces modes peuvent être déterminés de façon analytique et une résolution détaillée du problème des oscillations libres d'une sphère élastique est présentée, par exemple, dans la référence [Eringen et Suhubi 1975]. Ils sont classés en deux catégories :

- les modes toroïdaux, que nous notons ${}_n T_\ell^{\pm m}$, qui correspondent à des mouvements de torsion de (et dans) la sphère sans mouvement de respiration, c'est à dire sans changement de volume de la sphère ;
- les modes sphéroïdaux, que nous notons ${}_n S_\ell^{\pm m}$, qui combinent des mouvements de torsion et de respiration.

Les modes de vibration de la sphère dépendent de trois indices entiers n, ℓ, m : l'indice n est un indice radial, les indices ℓ et m sont des indices angulaires (harmoniques sphériques $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$). La fréquence des modes de vibration pour une valeur de ℓ donnée ne dépend pas de m . C'est pourquoi cet indice est généralement omis dans la notation du mode. Chaque mode de vibration est $2\ell + 1$ fois dégénéré (l'indice m varie de $-\ell$ à $+\ell$). L'indice n est incrémenté de 1 à mesure que la fréquence augmente (ordre d'apparition des fréquences de résonances pour un ℓ donné). L'indice ℓ correspond aux nombres de lignes nodales à la surface, avec un déplacement nul. L'indice m donne le nombre de cercles passant par le pôle (méridiens) avec un déplacement nul. Il y a donc $\ell - |m|$ lignes nodales selon la latitude (parallèles). L'indice radial n correspond, dans le cas des modes toroïdaux, au nombre de sphères nodales. Dans le cas des modes sphéroïdaux, cette correspondance est valable uniquement lorsque $\ell = 0$; pour $\ell > 0$, on ne peut plus parler de sphères nodales car le déplacement pour ces modes possède une composante radiale et une composante tangentielle. En figures (4.30) et (4.31), on visualise les différents indices ainsi que certains modes de vibration⁴. Le mode ${}_0 T_0$ n'est pas défini.

4. Pour une visualisation plus complète des modes propres de vibration d'une sphère élastique, voir le site de Lucien Saviot <http://icb.u-bourgogne.fr/Nano/manapi/saviot/deform/> ou <http://lucien.saviot.free.fr/terre/>

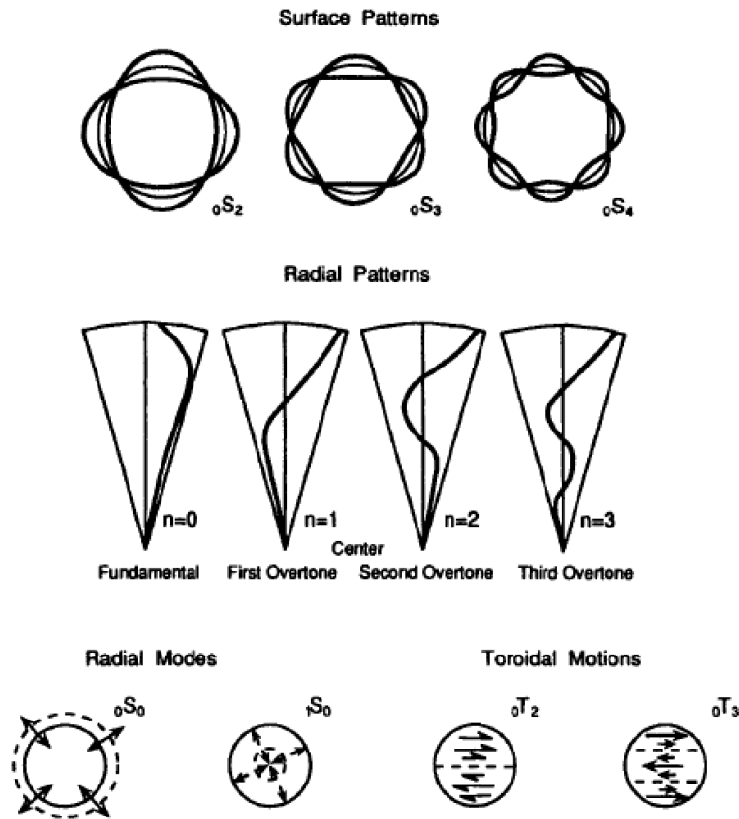
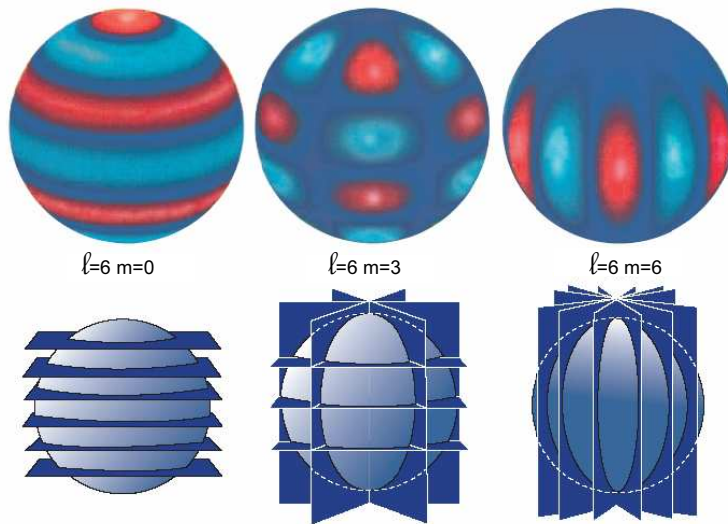


FIGURE 4.30 – Modes propres de vibration d'une sphère élastique [Lay et Wallace 1995].

FIGURE 4.31 – Visualisation de l'indice m pour le mode $0S_6$ [Nghiem et García].

La figure (4.32) présente le spectre expérimental des résonances pour une sphère en Aluminium 2017A dans une gamme fréquentielle s'étendant jusqu'à 105 kHz. Les valeurs des résonances calculées théoriquement sont repérées par les marqueurs de couleurs. Nous identifions ainsi les premiers modes résonants de la sphère élastique. Globalement, nous constatons un bon accord entre la théorie et l'expérience. Pour un mode résonant donné, nous observons l'apparition de plusieurs pics fréquentiels au lieu d'un seul prévu par la théorie. Ce phénomène non souhaité correspond à une levée de dégénérescence « acciden-

telle » liée à la brisure de symétrie induite par le support sur lequel repose l'objet. Les modes sphéroïdaux sont très bien identifiés, tandis que les modes toroïdaux ne sont pas ou peu détectés. Or, ces modes n'engendrent aucune déformation de la surface et ne peuvent donc pas être mesurés dans la configuration expérimentale choisie (excitation et mesure en incidence normale). D'autres configurations expérimentales ont été testées, en particulier l'excitation et la mesure en incidence oblique, mais sans améliorer de façon significative la détection des modes toroïdaux. En effet, ces autres configurations ne correspondent pas aux conditions optimales de fonctionnement de l'appareil et engendrent une diminution du rapport signal sur bruit.

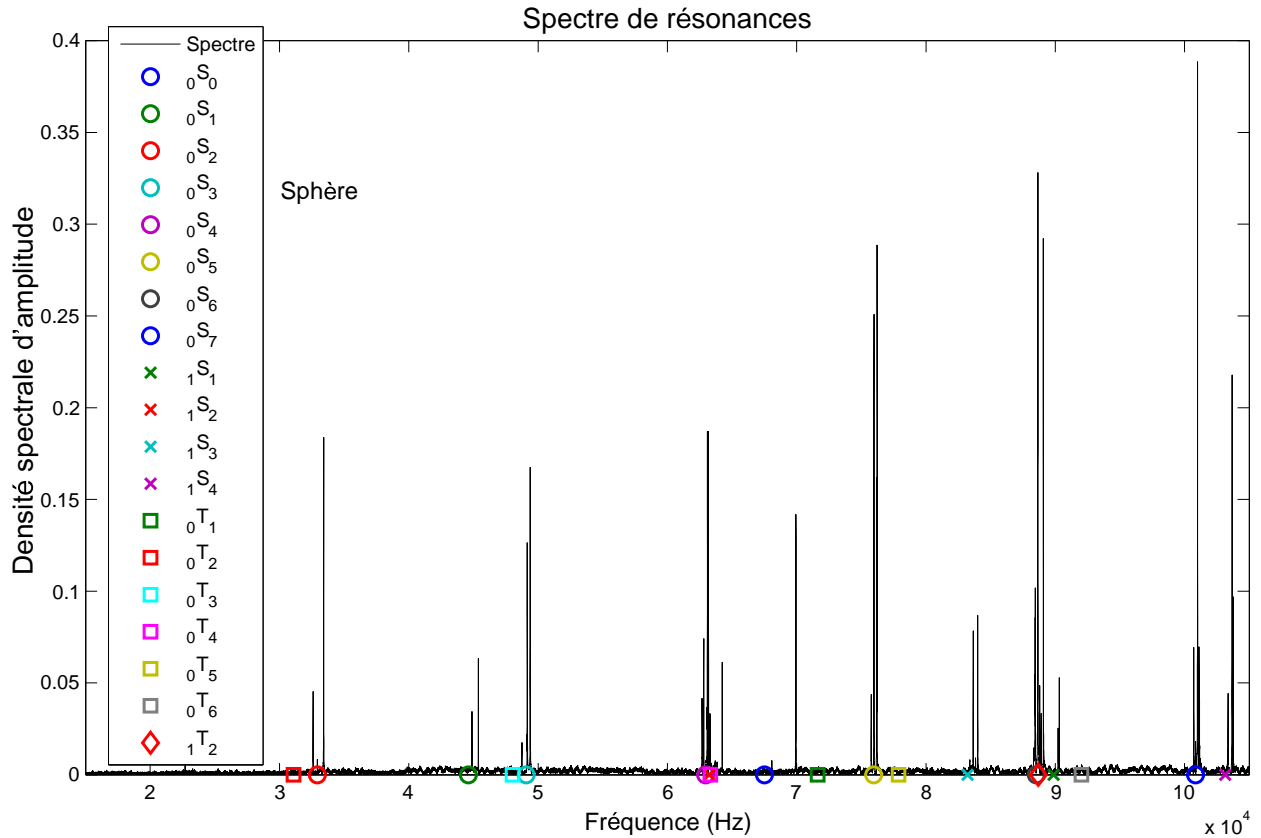


FIGURE 4.32 – Spectre des résonances pour la sphère en Aluminium 2017A .

Sur la figure (4.33), on présente les spectres expérimentaux des résonances pour une sphère ($B/A = 1$) et les sphéroïdes prolates P_1 , P_2 et P_3 d'excentricités croissantes ($B/A = 0,97; 0,94; 0,91$) en Aluminium 2017A. Les modes résonants pour la sphère et les sphéroïdes sont repérés par les marqueurs de couleur sur les spectres des résonances. Ils sont obtenus numériquement grâce à un code d'éléments finis et identifiés à partir de leurs déformées modales. Globalement, on note clairement une séparation croissante des pics qui correspond à une levée de dégénérescence des résonances intervenant au cours des transitions *Sphère* $\rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3$, i.e. $B/A = 1 \rightarrow 0,91$. Ce phénomène, interprété en termes de brisure de la symétrie sphérique, est observé théoriquement et expérimentalement, malgré la levée de dégénérescence « accidentelle » introduite par le support.

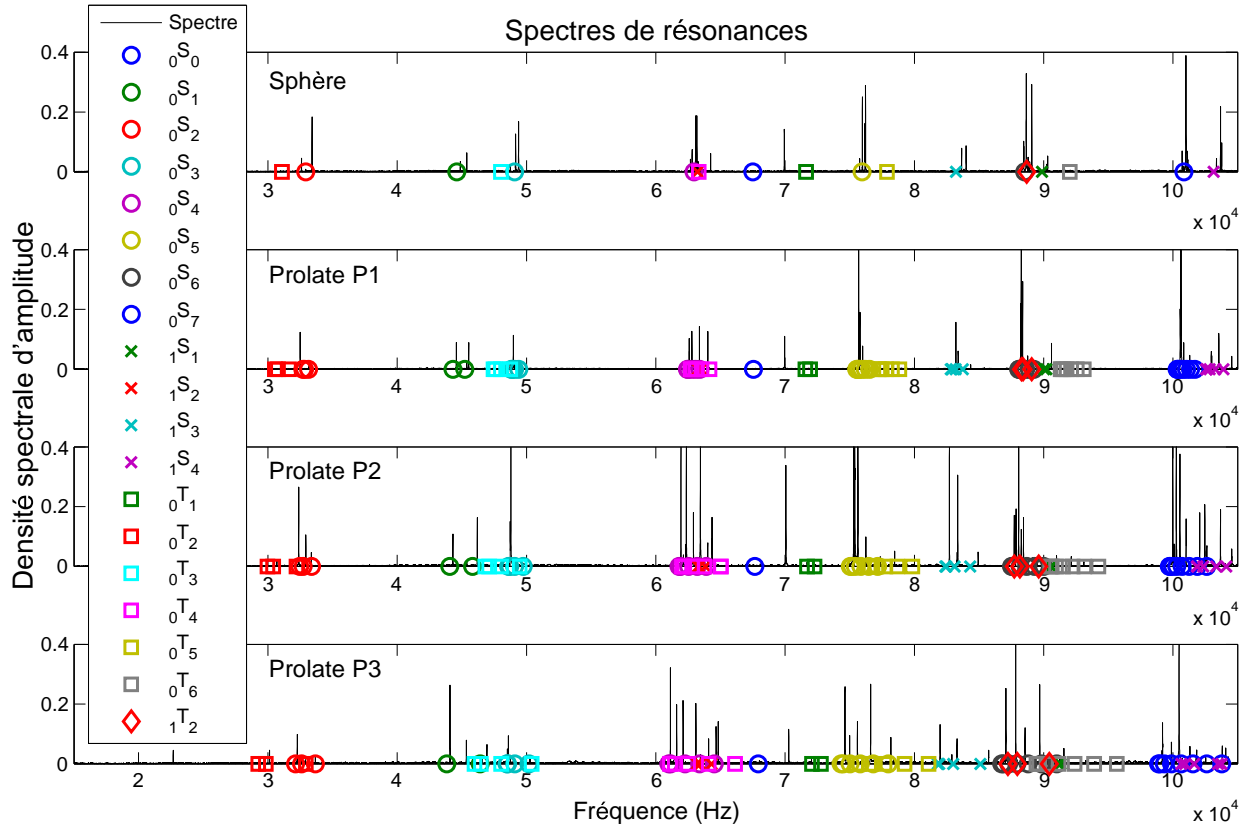
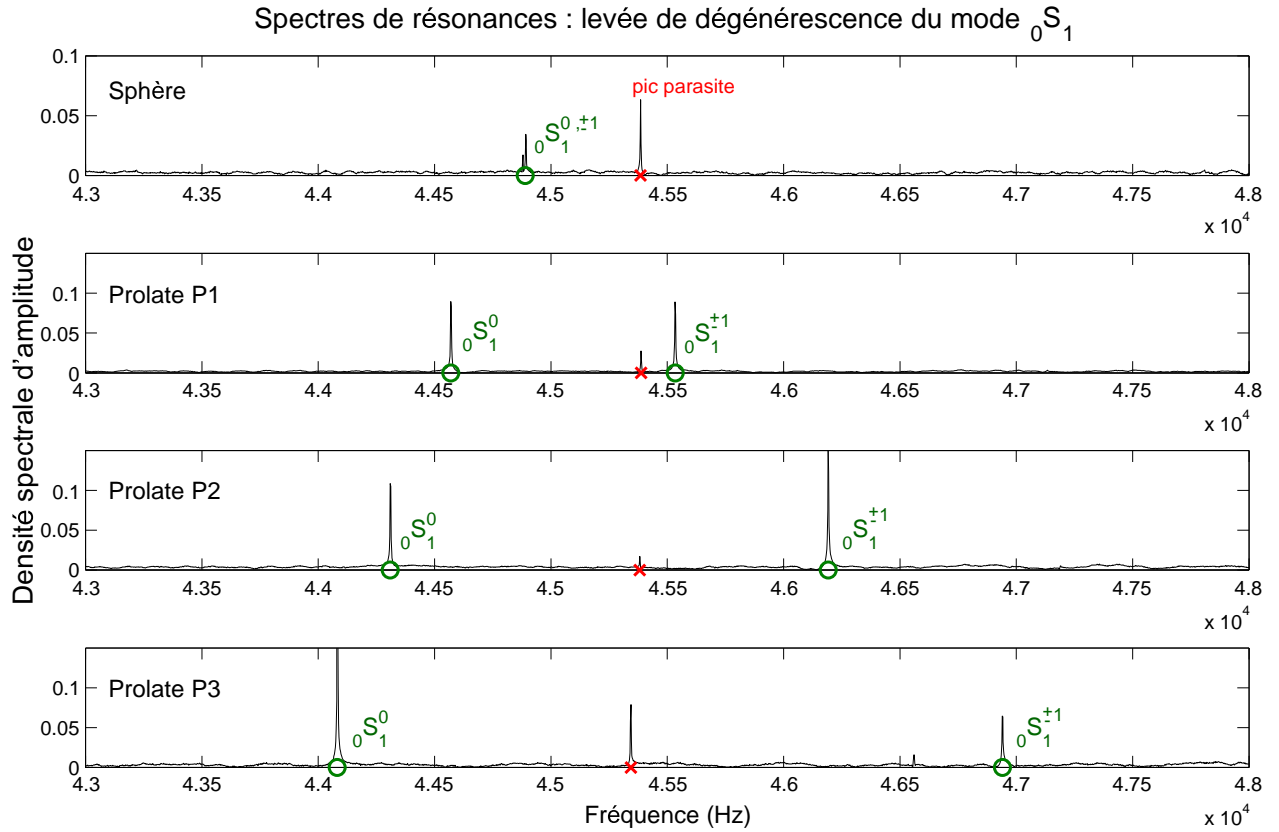


FIGURE 4.33 – Mise en évidence de la levée de dégénérescence.

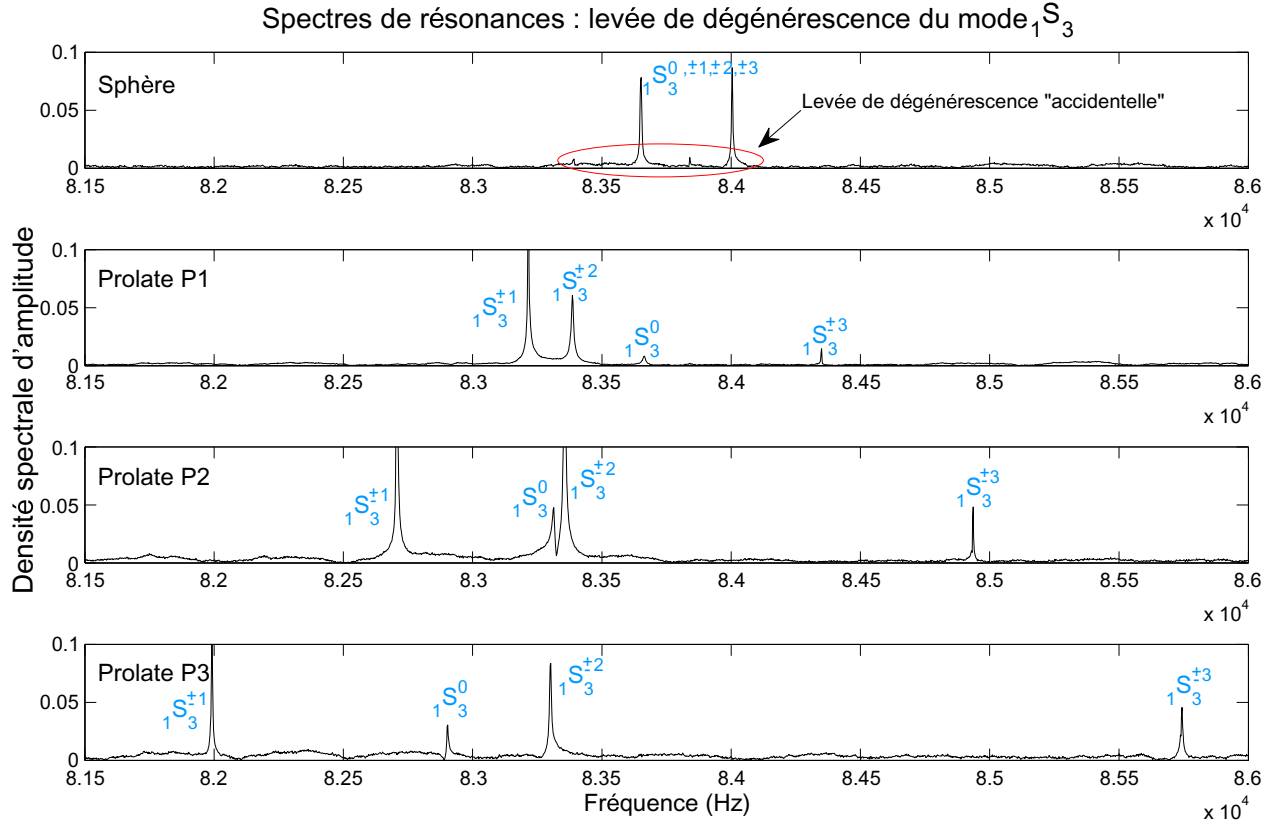
On rappelle que les résonances de la sphère sont $2\ell + 1$ fois dégénérées (l'indice m varie de $-\ell$ à $+\ell$). Lors de la transition de la géométrie sphérique vers la géométrie sphéroïdale, on pourrait s'attendre alors à observer $2\ell + 1$ résonances non dégénérées (levée de dégénérescence totale). Or, le système demeure invariant dans le changement ϕ en $-\phi$ et la levée de dégénérescence en m est partielle, *i.e.* il n'est pas possible de distinguer le signe de m pour un mode de vibration donné. On observe alors $\ell + 1$ résonances distinctes dont ℓ résonances deux fois dégénérées. L'identification de $|m|$ est possible en visualisant les déformées modales à partir d'un code d'éléments finis ; la valeur absolue de m correspond au nombre de cercles passant par les pôles avec un déplacement nul (Fig. 4.31). En sismologie, les modes propres de vibration de la Terre ont été étudiés par Dahlen [Dahlen 1968] en tenant compte de la rotation et de son ellipticité. Dans ses travaux, la levée de dégénérescence, partielle ou totale (lorsqu'il y a rotation de l'objet), est expliquée à partir d'une approche perturbative.

Parmi les modes résonants identifiés sur la figure (4.33), on s'intéresse à deux modes suffisamment isolés dans les spectres pour observer la levée de dégénérescence : ${}_0S_1$ (Fig. 4.34) et ${}_1S_3$ (Fig. 4.35). Sur la figure (4.34), le pic fréquentiel⁵ associé au mode ${}_0S_1$ se sépare en deux pics, l'un associé au mode non dégénéré ${}_0S_1^0$ et l'autre au mode partiellement non dégénéré ${}_0S_1^{\pm 1}$. On constate que la séparation augmente à mesure que l'excentricité croît. On note la présence d'un pic fréquentiel parasite aux environs de 45,4 kHz dans tous les spectres, lié au système interférométrique, et identifié à partir des mesures à vide (Sous-section 4.2.3).

5. Une faible séparation due à la levée de dégénérescence « accidentelle » est néanmoins observable.

FIGURE 4.34 – Mise en évidence de la levée de dégénérescence du mode ${}_0S_1$.

La figure (4.35) présente la levée de dégénérescence du mode ${}_1S_3$. Nous constatons que la levée de dégénérescence « accidentelle » sur le spectre associé à la sphère est beaucoup plus visible que pour le mode ${}_0S_1$. Le décalage fréquentiel engendré entraîne une difficulté supplémentaire dans l'identification des modes résonants des sphéroïdes. Malgré cela, une analyse des valeurs de résonances calculées par un code d'éléments finis combinée à la visualisation des déformées modales nous permet de déterminer ces modes. La levée de dégénérescence est partiellement levée et on observe quatre pics associés aux modes ${}_1S_3^0$ non dégénéré, et ${}_1S_3^{\pm 1}$, ${}_1S_3^{\pm 2}$, ${}_1S_3^{\pm 3}$ partiellement non dégénérés. Une fois encore, la séparation des résonances s'accroît à mesure que la déformation augmente.

FIGURE 4.35 – Mise en évidence de la levée de dégénérescence du mode ${}_1S_3$.

4.4.2 Spectre des résonances et spectre des longueurs des orbites périodiques

Dans cette sous-section, nous présentons les spectres des longueurs des orbites périodiques calculés à partir des spectres expérimentaux des résonances pour la sphère et les sphéroïdes prolate P_4 et oblate O_5 (Paragraphe 4.2.1.1). Ces résultats sont obtenus en utilisant le lien théorique connu entre ces deux types de spectres. Nous rappelons également quelques généralités sur les orbites périodiques en géométries sphérique et sphéroïdale.

4.4.2.1 Généralités sur les orbites périodiques en 3D

Dans une sphère, il existe des orbites périodiques linéaires selon les diamètres et planes dans un plan contenant le diamètre [Balian et Bloch 1972, Brack et Bhaduri 1997]. Ces orbites sont identiques à celles du disque circulaire. Lors de la transition vers un sphéroïde, les orbites selon les diamètres bifurquent vers des orbites selon le grand axe et le petit axe tandis que les orbites planes bifurquent vers de nouvelles orbites planes dans le plan méridien et dans le plan équatorial. Dans le plan méridien, ces orbites ont pour caustique une ellipse (ces orbites sont dites elliptiques) et sont celles du disque elliptique (Section 2.4). Dans le plan équatorial, ce sont les orbites du disque circulaire (Section 2.4). Dans la suite, nous conservons les notations des orbites adoptées dans le chapitre 2. Lorsque la déformation augmente, des orbites tridimensionnelles et de nouvelles orbites planes émergent, suite à des bifurcations qui sont de deux types :

- les multiples aller-retours selon le petit axe bifurquent et génèrent des orbites planes dans le plan méridien dont la caustique est une hyperbole ; ces orbites sont dites hyperboliques. Ce type de bifurcation est identique à celui observé dans le cas du disque elliptique. Ces orbites sont prédominantes dans le cas des déformations oblates [Arita et al. 1998].

- les orbites planes du plan équatorial qui font au moins deux tours bifurquent pour engendrer des orbites tridimensionnelles parcourant le volume. Ces orbites sont prédominantes dans le cas des déformations prolates [Arita et al. 1998].

Pour une étude détaillée des orbites périodiques dans un sphéroïde, on renvoie le lecteur aux travaux de Magner [Magner et al. 2002]. Dans toutes les références citées dans ce paragraphe, la déformation s'effectue, comme dans notre cas, à volume constant.

4.4.2.2 Présentation des résultats

Les spectres des longueurs des orbites périodiques pour la sphère et les sphéroïdes prolate P_4 et oblate O_5 sont obtenus en détectant les résonances sur les spectres des résonances expérimentaux grâce à la technique expliquée dans le paragraphe 4.2.4. Les valeurs des fréquences sont ainsi récupérées pour construire la densité spectrale des résonances $\rho(k)$. Les spectres des longueurs des orbites périodiques sont obtenus numériquement en traçant la densité spectrale d'énergie $|TF[\rho(k)]|^2$ dans une gamme fréquentielle allant jusqu'à 1 MHz, avec $TF[\rho(k)]$ donnée par

$$TF[\rho(k)](L) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha k^2} \rho(k) e^{-ikL} dk \quad (4.6)$$

où L est la longueur de l'orbite périodique et α le paramètre de la pondération gaussienne. Les considérations mathématiques sur les orbites périodiques décrites dans le chapitre 2 sont reprises ici. Notons qu'en 3D la partie lisse de la fonction de comptage s'écrit, dans le cas isotrope pour des conditions aux limites de frontière libre [Safarov et Vassilev 1997]

$$\mathcal{N}(\omega) = \left(\frac{1}{c_L^3} + \frac{2}{c_T^3} \right) \frac{\mathcal{V}}{6\pi^2} \omega^3 + \frac{b\mathcal{A}}{16\pi} \omega^2 + o(\omega^2) \quad (4.7)$$

avec c_L et c_T les vitesses des ondes longitudinales et transversales, $b = \frac{3c_L^4 - 3c_L^2 c_T^2 + 2c_T^4}{c_L^2 c_T^2 (c_L^2 - c_T^2)}$, \mathcal{V} le volume du domaine et \mathcal{A} son aire.

Nous présentons dans un premier temps les spectres des orbites périodiques, théoriques et expérimentaux, pour la sphère. Les modes résonants d'une sphère élastique étant connus de façon analytique, l'étude préliminaire de cet objet permet de valider la procédure expérimentale en vue d'étudier les sphéroïdes. On s'intéresse en particulier à l'orbite associée à l'onde de Rayleigh et à son évolution au cours de la déformation vers les sphéroïdes. D'autre part, compte tenu de la quasi-impossibilité à détecter les modes toroïdaux, cette étude préalable permet d'estimer l'influence de la « perte » des résonances associées à ces modes. On pourrait également quantifier cette perte en comparant les fonctions de comptage théorique et expérimentale.

La figure (4.36) présente une comparaison entre les spectres théoriques des orbites périodiques obtenus à partir

- du spectre des résonances de la sphère,
- du spectre des résonances associées uniquement aux modes sphéroïdaux de la sphère.

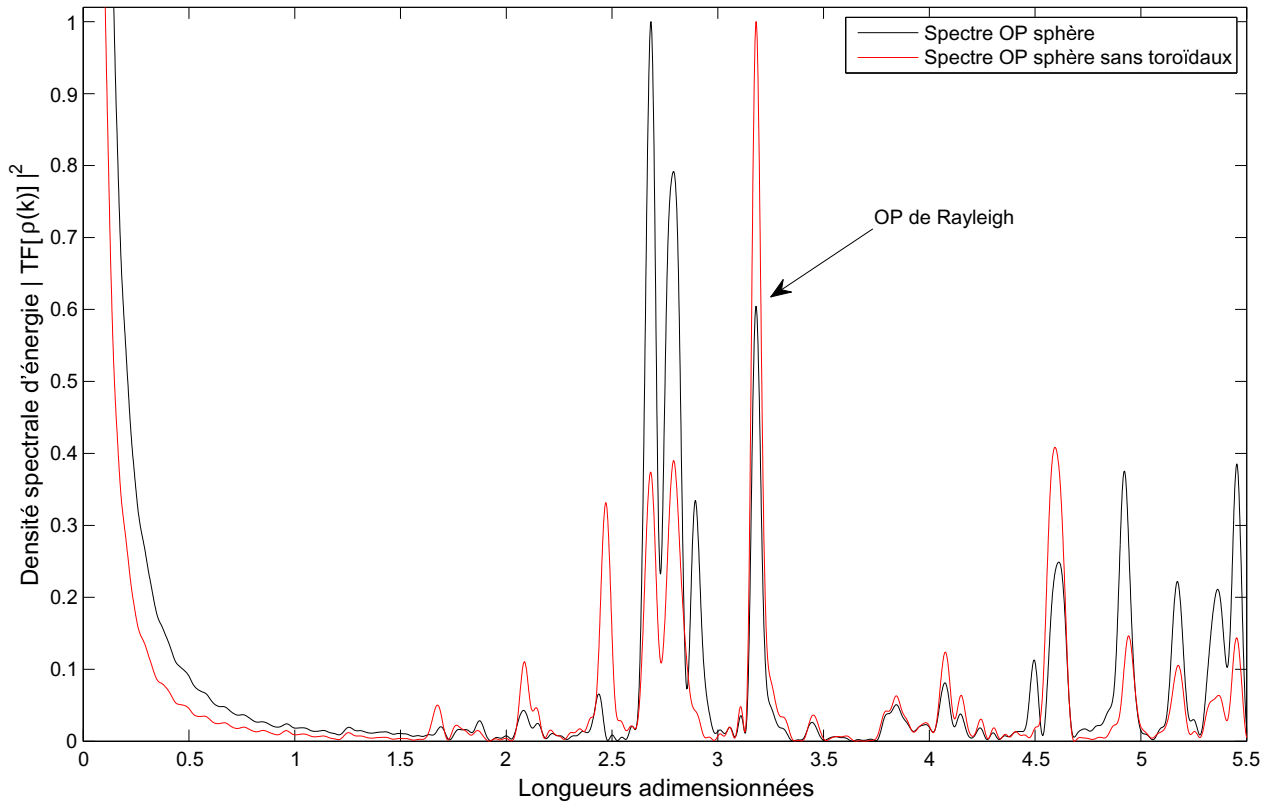


FIGURE 4.36 – Comparaison entre le spectre des résonances et le spectre des résonances associées uniquement aux modes sphéroïdaux pour la sphère.

On constate que, dans le domaine des longueurs considéré, on peut détecter la très grande majorité des orbites périodiques même en l'absence des modes toroïdaux. Cette « perte » affecte essentiellement l'amplitude des pics et non leur position. À partir de cette observation, on conclut que la non détection expérimentale des résonances associées aux modes toroïdaux n'influe pas sur la position des pics associée à la longueur des orbites périodiques et ne nuit donc pas à l'obtention des orbites périodiques. On émet l'hypothèse que ce constat concernant la contribution des modes toroïdaux dans le spectre des orbites périodiques de la sphère reste valable dans le cas des sphéroïdes.

La figure (4.37) présente une comparaison entre les spectres des orbites périodiques théorique et expérimental pour une sphère en aluminium 2017A. Dans le domaine considéré, on retrouve expérimentalement la position des orbites périodiques qui apparaissent sur le spectre théorique. On constate, comme noté précédemment, que la non détection expérimentale des modes toroïdaux n'affecte que l'amplitude des pics. L'orbite associée à l'onde de Rayleigh est identifiée sans ambiguïté pour une longueur de $L \approx 3,2$ sur le spectre expérimental en très bon accord avec la valeur théorique. D'autres orbites, avec et sans conversion de mode, sont également identifiées par le calcul de leur longueur à partir de la méthode géométrique appliquée au disque circulaire (Sous-section 2.4.2). Cette comparaison théorie/expérience fournit une validation de la procédure expérimentale mise en oeuvre.

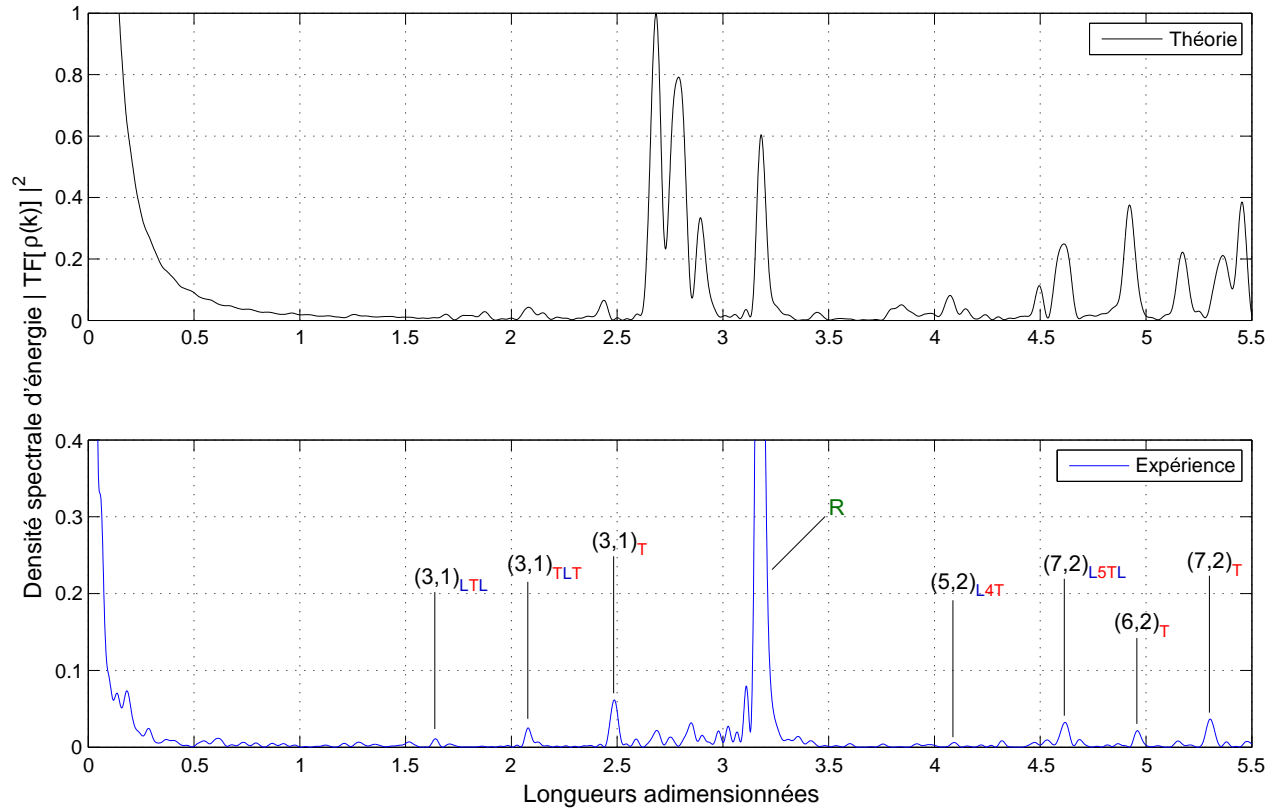


FIGURE 4.37 – Comparaison théorie/expérience des spectres des longueurs des orbites périodiques d'une sphère en aluminium 2017A .

Pour les sphéroïdes, l'étude théorique n'a pas encore été réalisée et nous ne pouvons effectuer la comparaison théorie/expérience comme dans le cas de la sphère. Toutefois, on réalise une comparaison entre un spectre expérimental des orbites périodiques pour un sphéroïde et un spectre obtenu à partir de ses résonances calculées par un code d'éléments finis⁶ en figure (4.38). L'allure générale de la courbe expérimentale est en bon accord avec celle obtenue numériquement. De plus, on constate une bonne concordance dans la position des pics, en particulier celui associé à l'onde de Rayleigh à une longueur $L \approx 3$. Cette comparaison complète et confirme les conclusions tirées de la comparaison théorie/expérience pour la sphère quant à la validation de la procédure expérimentale.

6. Pour des raisons numériques, le domaine fréquentiel est limité à 250 kHz.

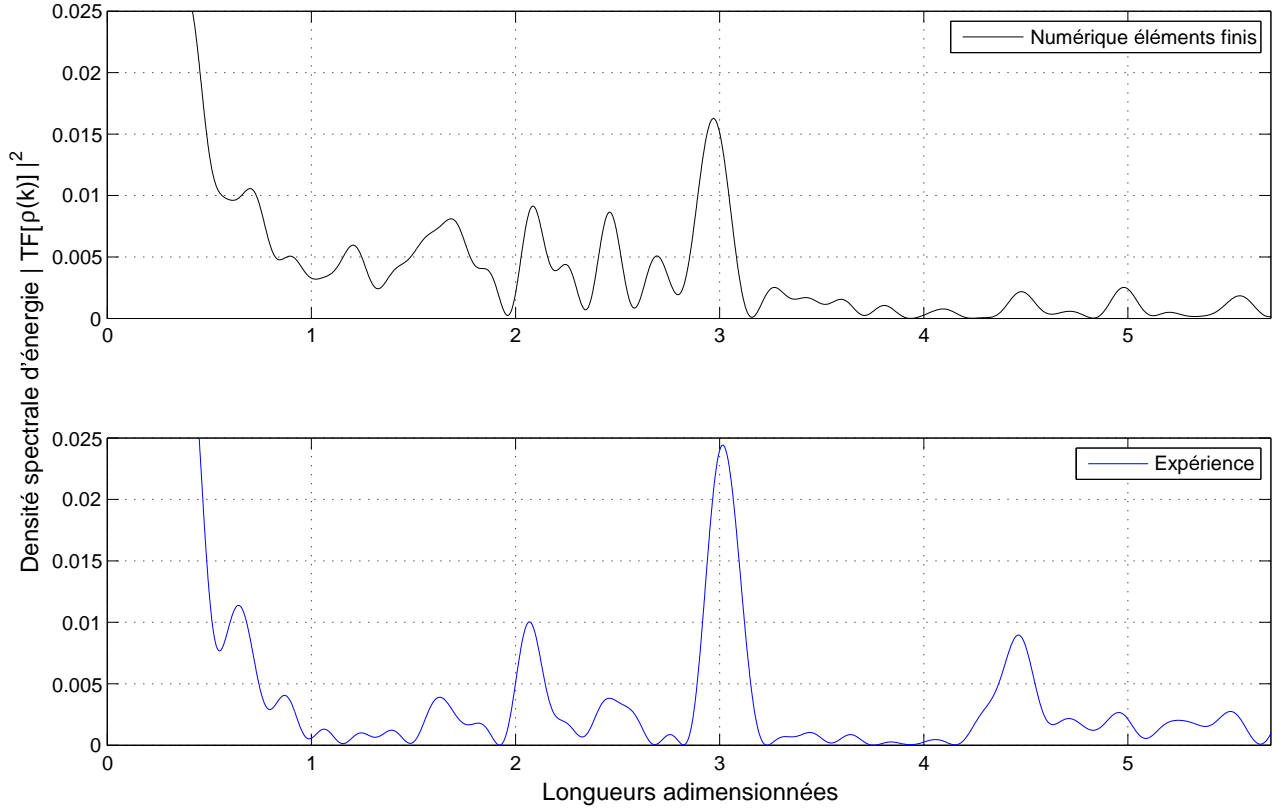


FIGURE 4.38 – Comparaison calcul numérique par éléments finis / expérience des spectres des longueurs des orbites périodiques du sphéroïde oblate O_3 en aluminium 2017A .

Les spectres expérimentaux des orbites périodiques pour les sphéroïdes prolates P_4 et oblates O_5 sont présentés respectivement en figures (4.39) et (4.40). Numériquement, on trace la densité spectrale d'énergie $|TF[\rho(k)]|^2$ (Eq. 4.6) en choisissant le paramètre de la pondération gaussienne $\alpha = 1,5$. Nous choisissons les sphéroïdes P_4 et O_5 afin de mettre en évidence les deux orbites associées aux deux trajets parcourus par l'onde de Rayleigh qui ont été identifiés sur les réponses temporelles. Les configurations expérimentales choisies sont celles réalisées dans la configuration émission-détection à 180° , pour laquelle ces deux trajets sont clairement visibles sur les réponses temporelles.

La figure (4.39) présente le spectre expérimental des orbites périodiques pour le sphéroïde prolates P_4 . Nous identifions sans ambiguïté les deux orbites associées aux deux trajets extrémaux de l'onde de Rayleigh aux longueurs de $L \approx 2,8$ et $L \approx 3,5$ correspondant respectivement aux temps de parcours $t \approx 74,9\mu s$ et $t \approx 94,1\mu s$, en très bon accord avec les résultats obtenus dans le domaine temporel (Sous-section 4.3.2). Notons que les mesures effectuées dans les domaines temporel et fréquentiel sont en très bon accord (erreur relative $\leq 1\%$) avec les périodes temporelles théoriques données dans le tableau (4.4). La première orbite qui émerge à $L \approx 2,8$ est associée au trajet circulaire de l'onde de Rayleigh dans le plan équatorial, la seconde à $L \approx 3,5$ est associée à son trajet elliptique dans le plan méridien. D'autre part, on identifie certaines orbites du disque circulaire dans le plan équatorial ainsi que certaines orbites du disque elliptique dans le plan méridien, avec et sans conversion de mode dans les deux plans. De plus, dans le plan méridien, l'orbite $(3,1)_{TLT}^r$ émerge pour deux longueurs correspondant aux deux trajets minimal et maximal qu'elle parcourt pour des longueurs de $L \approx 2,2$ et $L \approx 2,6$ en accord avec le théorème de Fermat. Enfin, certaines orbites hyperboliques (de libration) avec conversion de mode apparaissent également sur le spectre. Notons que certaines orbites du plan équatorial sont susceptibles d'avoir bifurqué vers des orbites tridimensionnelles. En effet, le sphéroïde prolates P_4 présente un rapport

$B/A = 0,67$, proche de la valeur de bifurcation rencontrée dans la littérature, dans le cas scalaire, pour des orbites sans conversion de mode [Arita et al. 1997]. On précise que ces orbites ne sont pas identifiées sur le spectre.

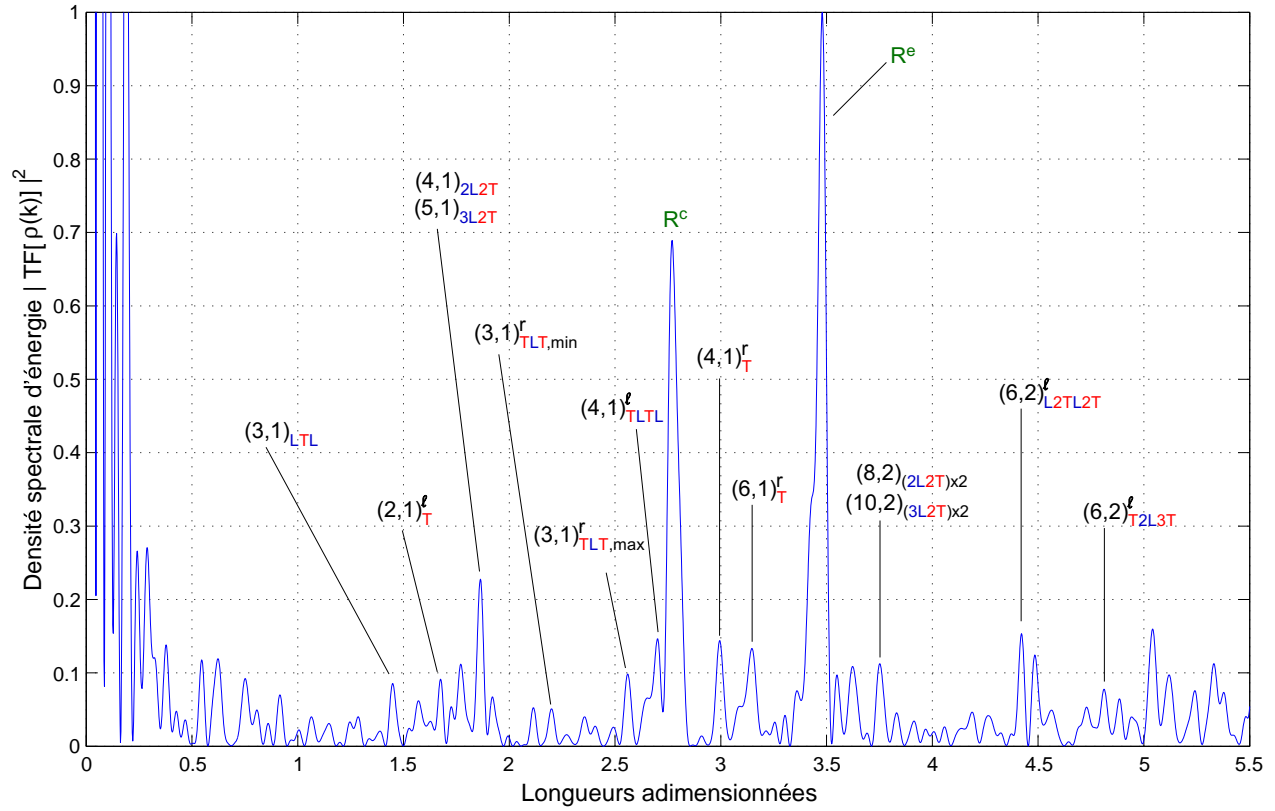


FIGURE 4.39 – Spectre expérimental des longueurs des orbites périodiques pour le sphéroïde prolate P_4 en aluminium 2017 A .

La figure (4.40) présente le spectre expérimental des orbites périodiques pour le sphéroïde oblate O_5 . De nouveau, nous identifions sans ambiguïté les deux orbites associées aux deux trajets extrémaux de l'onde de Rayleigh pour des longueurs de $L \approx 3,1$ et $L \approx 4$ correspondant respectivement aux temps de parcours $t \approx 83,5 \mu s$ et $t \approx 108,8 \mu s$. La première orbite est associée au trajet elliptique dans le plan méridien, la seconde au trajet circulaire dans le plan équatorial. Ces résultats sont en très bon accord avec les mesures effectuées dans le domaine temporel (Sous-section 4.3.2). Une fois encore, on note un très bon accord entre la théorie et l'expérience (Tab. 4.4). Des orbites circulaires dans le plan équatorial et elliptiques dans le plan méridien sont également mises en évidence, avec et sans conversion de mode. Nous identifions également les deux orbites associées aux trajets extrémaux parcourus pour l'orbite $(3,1)_{TLT}^r$ dans le plan méridien. Enfin, toujours dans ce même plan, plusieurs orbites hyperboliques (de libration) notamment celles du type $(6,1)_{TL}^{\ell}$ émergent sur le spectre, en accord avec les résultats de la littérature dans le cas scalaire. En effet, le rapport B/A pour le sphéroïde oblate O_5 est proche de 0,5, qui correspond à la valeur caractérisant les fortes déformations à partir de laquelle les orbites de ce type sont prédominantes [Arita et al. 1998].

TABLE 4.5 – Récapitulatif des périodes temporelles théoriques et expérimentales de l’onde de Rayleigh selon les trajets circulaire (T_c) et elliptique (T_e) pour les sphéroïdes P_4 et O_5 .

	Périodes temporelles de l’onde de Rayleigh en μs		
	Calcul théorique	Mesure - domaine temporel	Mesure - domaine fréquentiel
$T_e(P_4)$	95,08	94,62	94,05
$T_c(P_4)$	75,54	75,14	74,86
$T_e(O_5)$	83,94	83,33	83,46
$T_c(O_5)$	109,21	108,69	108,76

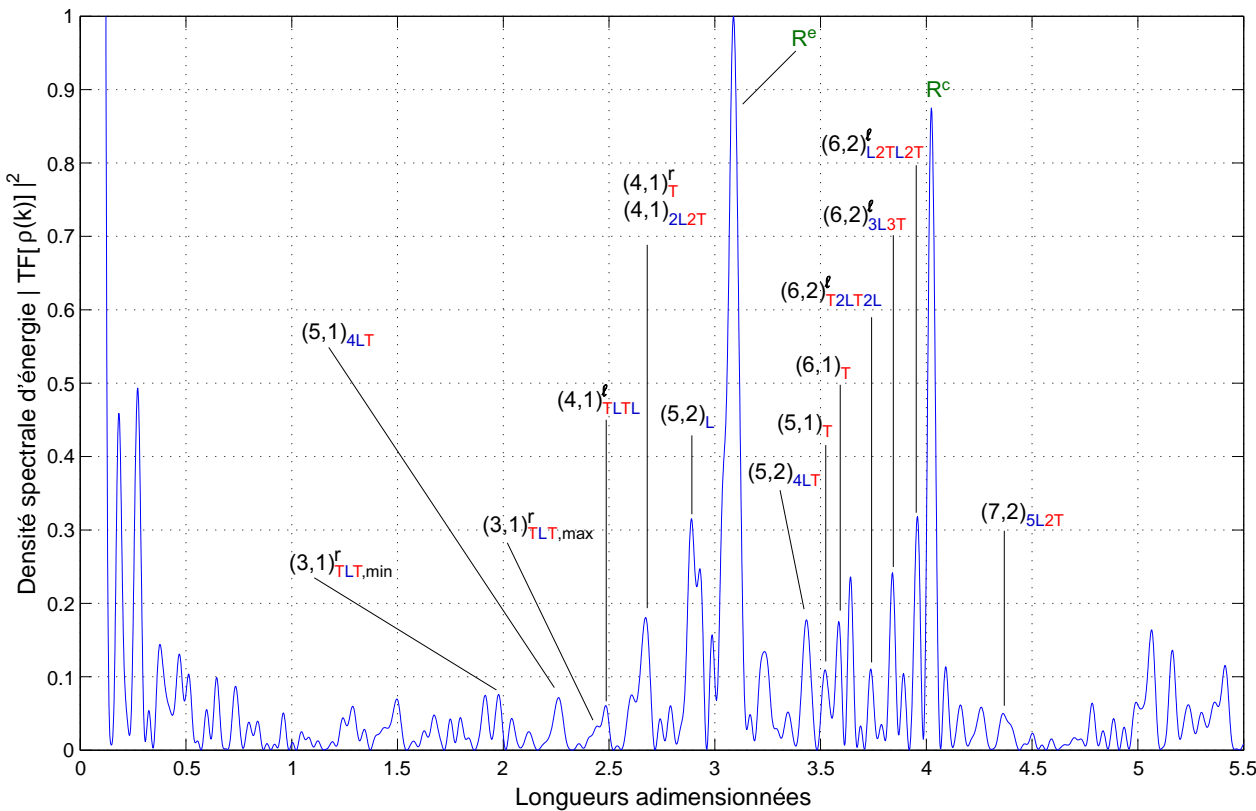


FIGURE 4.40 – Spectre expérimental des longueurs des orbites périodiques pour le sphéroïde oblate O_5 en aluminium 2017 A .

Précisons que nous n’avons pas cherché ici à identifier toutes les orbites apparaissant sur les spectres. Nous nous sommes intéressés particulièrement à la mise en évidence des orbites associées à l’onde de Rayleigh ainsi qu’à celles engendrées par le phénomène de conversion de mode.

On récapitule dans le tableau (4.5) les périodes temporelles de l’onde de Rayleigh mesurées dans les domaines temporel et fréquentiel.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Les modes résonants de sphéroïdes élastiques de formes oblate et prolata ont été étudiés expérimentalement par une approche utilisant la génération et la détection optiques d’ondes élastiques. Nous avons prêté une attention particulière à l’onde de Rayleigh qui se propage sur la surface de ces objets ainsi qu’à la levée de dégénérescence qui se produit au cours de la transition de la sphère vers le sphéroïde.

L'étude dans le domaine temporel a été consacrée à l'onde de Rayleigh. Nous avons mis en évidence deux trajets parcourus par cette onde en géométrie sphéroïdale : un trajet elliptique dans le plan méridien et un trajet circulaire dans le plan équatorial. Les résultats expérimentaux sont en très bon accord avec les temps de parcours théoriques des deux trajets de l'onde de Rayleigh. Le théorème de Fermat nous a permis d'interpréter l'existence de ces deux trajets extrémaux.

Dans le domaine fréquentiel, nous avons étudié expérimentalement les résonances d'une sphère et de sphéroïdes en Aluminium 2017A. Plus précisément, la levée de dégénérescence partielle a été observée lorsque la sphère est déformée vers les sphéroïdes. Cette séparation des résonances, interprétée en termes de brisure de la symétrie sphérique, est d'autant plus marquée que la déformation est importante.

Enfin, à partir des spectres expérimentaux des résonances, nous avons obtenu les spectres des orbites périodiques. Nous avons mis clairement en évidence les orbites correspondant aux deux trajets parcourus par l'onde de Rayleigh en géométrie sphéroïdale. D'autre part, nous avons identifié certaines orbites circulaires dans le plan équatorial ainsi que des orbites elliptiques et hyperboliques dans le plan méridien, avec et sans conversion de mode.

CONCLUSION

L'objectif principal de notre travail de thèse était l'étude du problème intérieur en élastodynamique (géométries elliptique et sphéroïdale) et celle du problème de diffusion en acoustique (géométrie elliptique). Nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux résonances et nos travaux ont été réalisés en tenant compte du rôle important joué par les symétries. Dans ce but, nous avons commencé par étendre au contexte vectoriel une méthode basée sur la théorie des groupes, utilisée auparavant dans un contexte scalaire. En présence d'un milieu élastique, certaines quantités physiques à considérer dans les différents problèmes sont scalaires, d'autres vectorielles. Il a donc été nécessaire de comprendre la décomposition de fonctions vectorielles sur les représentations des groupes de symétrie concernés.

Nous avons ensuite développé une méthode combinant le formalisme modal et la théorie des groupes pour étudier le problème intérieur et le problème de diffusion en géométrie elliptique (2D).

À partir des considérations de symétrie, les résonances se classent en quatre familles distinctes associées aux quatre représentations irréductibles A_1, A_2, B_1, B_2 du groupe de symétrie de l'ellipse C_{2v} . Chaque mode résonant est repéré par les deux indices (n, ℓ) du formalisme modal ainsi que par le nom de la représentation à laquelle il appartient. Pour un indice n donné, l'existence de deux types de modes distincts est établie. Plus précisément, on distingue les résonances A_1 et A_2 pour n pair, et B_1 et B_2 pour n impair. Nous avons mis ainsi en évidence la levée de dégénérescence des résonances et des considérations algébriques (théorie des groupes) nous ont permis de comprendre et d'interpréter ce phénomène en termes de brisure de symétrie.

L'utilisation de la théorie des groupes simplifie de façon significative le traitement numérique du problème. De plus, les calculs peuvent être effectués pour de grandes excentricités mais également pour des fortes valeurs du nombre d'onde réduit kr . En comparant avec les résultats obtenus à partir d'un code d'éléments finis, l'implémentation numérique de notre méthode présente l'avantage d'être rapide, de fournir des valeurs précises des résonances, y compris à haute fréquence.

Le problème de diffusion a été également étudié sur le plan expérimental. Une série d'expériences en cuve par spectroscopie ultrasonore a été menée dans le cas de cylindres elliptiques en aluminium immergés dans l'eau. Afin de mettre en évidence la levée de dégénérescence liée à la brisure de symétrie, nous avons sélectionné des cylindres d'excentricités différentes. Les résultats expérimentaux sont en très bon accord avec la théorie. En effet, le phénomène est clairement observé à la fois théoriquement (numériquement) et expérimentalement. De plus, les modes résonants ont pu être identifiés et suivis en excentricité à partir des modes du cylindre circulaire, comme nous l'avons fait pour le problème intérieur.

Enfin, nous avons étudié le problème intérieur en géométrie sphéroïdale (3D) par une approche expérimentale de génération et de détection optiques d'ondes élastiques. Une série d'expérimentations a été menée dans le cas de sphéroïdes de formes oblate et prolata en aluminium. La réponse vibratoire des objets a été analysée dans les domaines temporel

et fréquentiel. On s'est intéressé en particulier à la propagation de l'onde de Rayleigh ainsi qu'à la levée de dégénérescence des résonances qui intervient lors du passage de la géométrie sphérique vers la géométrie sphéroïdale. Nous avons mis en évidence deux trajets parcourus par cette onde en géométrie sphéroïdale : un trajet elliptique dans le plan méridien, maximal pour la forme prolata et minimal pour la forme oblate, et un trajet circulaire dans le plan équatorial, maximal pour la forme oblate et minimal pour la forme prolata. Les résultats expérimentaux sont en très bon accord avec les temps de parcours théoriques des deux trajets de l'onde de Rayleigh. Le théorème de Fermat nous a permis d'interpréter l'existence de ces deux trajets extrémaux. Enfin, nous avons observé expérimentalement la levée de dégénérescence partielle liée à la brisure de symétrie en comparant les spectres des résonances pour des sphéroïdes d'excentricités croissantes. Les modes résonants ont été identifiés et suivis à partir des modes de la sphère en s'aidant d'un code d'éléments finis.

Dans le cadre du problème intérieur en géométries elliptique et sphéroïdale, on donne une interprétation en terme de rayons à travers le lien connu entre spectre des résonances et spectre des longueurs (ou des temps de parcours) des orbites périodiques. Les orbites de pression pure, de cisaillement pur, ainsi que celles incluant la conversion de mode sont mises en évidence. Enfin, l'orbite de Rayleigh apparaît également de façon claire pour diverses excentricités, à la fois en géométries elliptique et sphéroïdale. Dans le second cas, nous observons sur le spectre deux pics associés au deux trajets extrémaux parcourus par l'onde de Rayleigh en géométrie sphéroïdale. Nous avons obtenu géométriquement les longueurs des orbites périodiques pour le disque elliptique élastique, y compris lorsque le phénomène de conversion de mode se produit. Ces calculs sont encore valables dans le cas des sphéroïdes, où il existe des orbites dans le plan du disque circulaire (plan équatorial) et d'autres dans le plan du disque elliptique (plan méridien). Nous observons un phénomène, nouveau à notre connaissance, lors de la conversion de mode et que nous interprétons à partir du principe de Fermat. Deux trajets, l'un minimal et l'autre maximal, apparaissent sur le spectre des longueurs pour une orbite donnée.

En géométrie elliptique, il serait intéressant de compléter l'étude théorique du problème intérieur par une partie expérimentale à partir des techniques de génération et détection optiques d'ondes élastiques, utilisées en géométrie sphéroïdale. Plus précisément, l'association d'un laser pulsé avec une lentille cylindrique permettrait de générer une source acoustique linéique selon l'axe des cylindres elliptiques infinis. Le choix de cylindres de différentes excentricités permettrait de mettre en évidence la levée de dégénérescence liée à la brisure de symétrie. La mesure serait réalisée par vibrométrie laser. On pourrait ensuite comparer les résultats expérimentaux avec les résultats numériques obtenus dans cette thèse, comme cela a été fait dans le cadre du problème de diffusion. Plus particulièrement, la comparaison des spectres des longueurs des orbites périodiques expérimentaux avec les spectres théoriques est plus aisée en 2D. En effet, pour le problème intérieur en 3D, il existe, en plus des orbites dans les plans méridiens et équatoriaux, des orbites tridimensionnelles provenant de la bifurcation des orbites dans le plan équatorial.

En géométrie sphéroïdale, l'étude théorique du problème intérieur pourrait être réalisée en coordonnées sphériques, à partir de notre méthode combinant le formalisme modal et la théorie des groupes. Il faudrait alors écrire la décomposition d'une fonction vectorielle sur les représentations irréductibles du groupe de symétrie continu $\mathcal{D}_{\infty h}$. La difficulté vient ici du fait que ce groupe est infini, contrairement au groupe \mathcal{C}_{2v} qui, lui, est discret donc fini. Les résultats numériques pourraient ensuite être comparés aux résultats expérimentaux obtenus dans cette thèse afin d'observer, numériquement et expérimentalement, la levée de dégénérescence.

On envisage également de traiter théoriquement et expérimentalement le problème de la diffusion acoustique par des sphéroïdes élastiques à partir de la même méthode. L'étude pourrait être complétée par une série d'expériences en cuve par spectroscopie ultrasonore. En choisissant des sphéroïdes d'excentricités différentes, on pourrait observer expérimentalement la levée de dégénérescence prévue par la théorie.

Plus généralement, concernant l'étude du problème intérieur en élastodynamique, la construction d'une théorie asymptotique permettrait de reconstituer l'ensemble des orbites périodiques à partir d'une formulation analytique, comme dans le cas des billards. Ceci constituerait très certainement un travail lourd et fastidieux mais fournirait une interprétation physique complète des phénomènes observés (onde de Rayleigh, levée de dégénérescence en termes d'orbites périodiques, conversion de mode, bifurcation).

Enfin, la méthode développée dans le cadre de notre travail ne se limite pas au seul domaine de l'acoustique. Elle pourrait très facilement être étendue à d'autres domaines de la physique des ondes comme l'électromagnétisme ou l'optique en tenant compte des conditions aux limites appropriées.

Les travaux réalisés dans cette thèse ont donné lieu à deux publications [Ancsey et al. 2013; 2014]

ANNEXES



SOMMAIRE

A.1	ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ELLIPTIQUE	131
A.1.1	Coordonnées elliptiques	131
A.1.2	Intégrales elliptiques	132
A.2	DÉCOMPOSITION SELON LES REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES DU GROUPE \mathcal{C}_{2v} . .	133
A.2.1	Propriétés de parité des coefficients inconnus	133
A.2.2	Expressions des champs scalaires dans les représentations irréductibles	134
A.3	LES FONCTIONS DE STRUCTURE	136
A.4	RÉDUCTION DE LA SOMME SUR p ET RESTRICTION AU DOMAINE FONDAMENTAL . .	137
A.5	COEFFICIENTS DE FOURIER POUR LE PROBLÈME INTÉRIEUR	138
A.6	COEFFICIENTS DE FOURIER POUR LA DIFFUSION	139
A.7	CALCULS DES LONGUEURS DES ORBITES PÉRIODIQUES SELON SIEBER	139

A.1 ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ELLIPTIQUE

A.1.1 Coordonnées elliptiques

En coordonnées cartésiennes, l'ellipse est décrite par la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{A.1})$$

avec a le demi-grand axe et b le demi-petit axe. Les deux foyers de l'ellipse sont repérés par les coordonnées $(\pm c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (demi-distance interfocale) et l'excentricité de l'ellipse est définie par $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ (Fig. A.1). La surface de l'ellipse est $\mathcal{A} = \pi ab$ et son périmètre est $\mathcal{L} = 4aE(e) = 4\frac{c}{e}E(e)$ où $E(e)$ est l'intégrale elliptique de seconde espèce (Sous-section A.1.2).

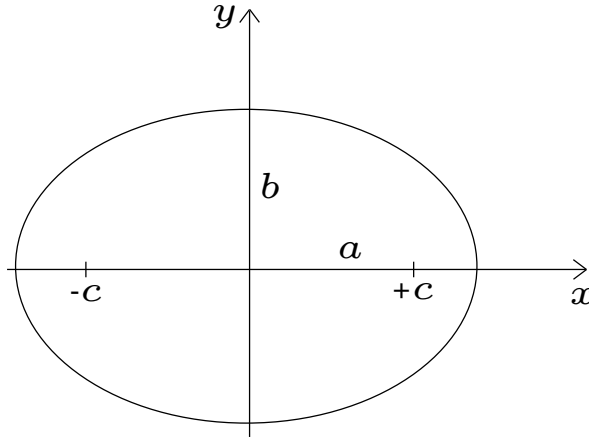


FIGURE A.1 – Ellipse.

En coordonnées elliptiques,

$$x = c \cosh u \cos v$$

$$y = c \sinh u \sin v$$

où u est la coordonnée radiale telle que $0 \leq u \leq \operatorname{arctanh} \frac{b}{a}$ et v est une coordonnée angulaire périodique de période de 2π (Fig. A.2).

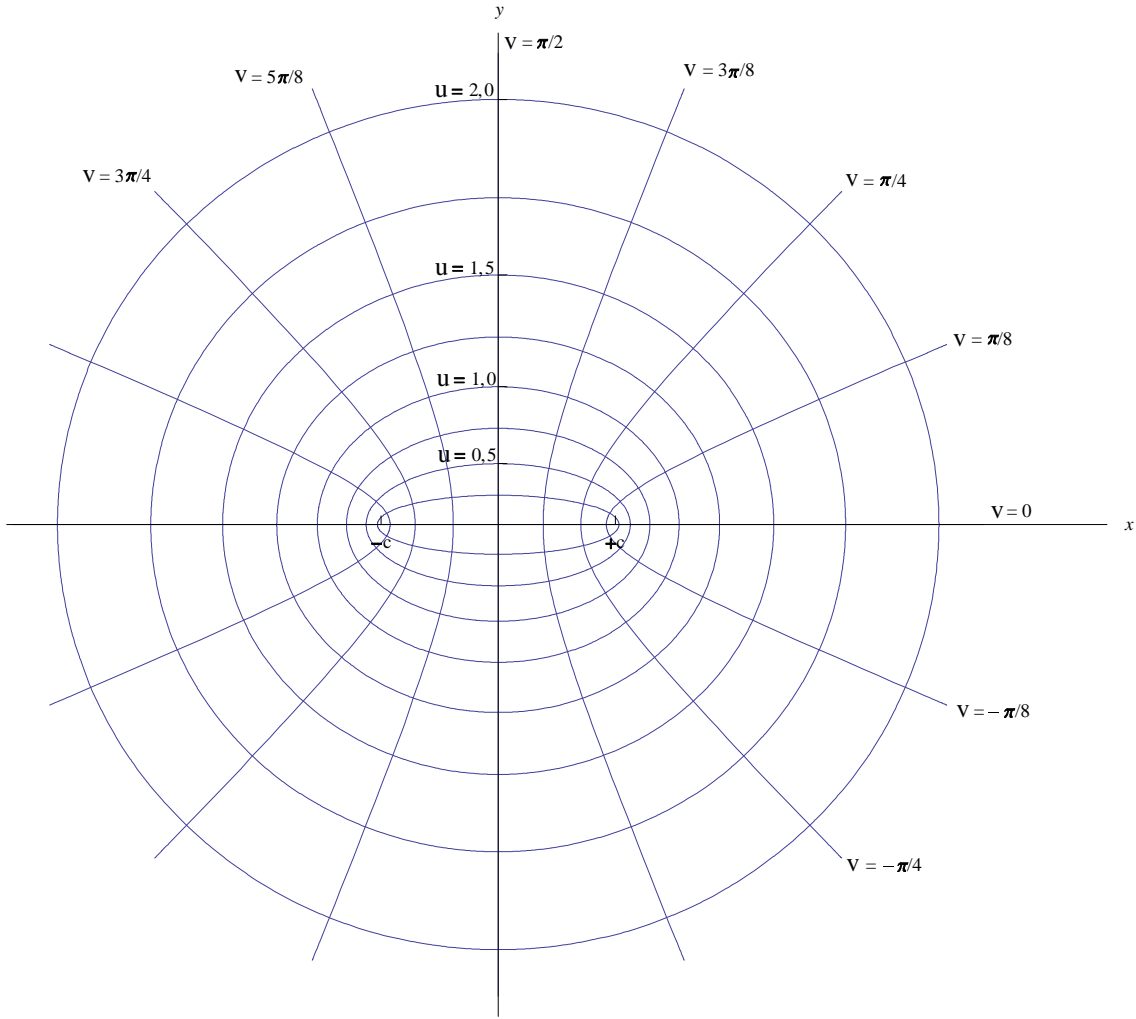


FIGURE A.2 – Système de coordonnées elliptiques.

Les demi-grand axe et demi-petit axe sont définis de la façon suivante

$$\begin{aligned} a &= c \cosh u \\ b &= c \sinh u. \end{aligned}$$

et l'excentricité s'écrit

$$e = \frac{1}{\cosh u}. \quad (\text{A.2})$$

On définit le rayon moyen par

$$r = \frac{c}{2} e^u = \frac{a+b}{2}. \quad (\text{A.3})$$

A.1.2 Intégrales elliptiques

L'intégrale elliptique de première espèce est définie par

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (\text{A.4})$$

Pour $\phi = \frac{\pi}{2}$, on définit l'intégrale elliptique complète $K(k)$.

L'intégrale elliptique de seconde espèce est définie par

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta. \quad (\text{A.5})$$

Pour $\phi = \frac{\pi}{2}$, on définit l'intégrale elliptique complète $E(k)$.

A.2 DÉCOMPOSITION DES CHAMPS SCALAIRES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION D'HELMHOLTZ SELON LES REPRÉSENTATIONS IRREDUCTIBLES DU GROUPE \mathcal{C}_{2v}

Les champs scalaires solutions de l'équation d'Helmholtz en coordonnées polaires sont de la forme

$$f(\rho, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n J_n(\rho) e^{in\theta} \quad \text{ou} \quad f(\rho, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n H_n^{(1)}(\rho) e^{in\theta}. \quad (\text{A.6})$$

En appliquant les transformations de symétrie à ces fonctions, on déduit des propriétés de parité pour les coefficients inconnus A_n selon chaque représentation. Ces propriétés associées aux propriétés de symétrie et de parité des fonctions de Bessel $J_n(\rho)$ (ou des fonctions de Hankel $H_n^{(1)}(\rho)$) permettent ensuite de restreindre les sommes dans (A.6) à des entiers positifs ou nuls.

A.2.1 Propriétés de parité des coefficients inconnus

On détermine ici les propriétés de parité des coefficients inconnus en utilisant l'action des transformations sur une fonction scalaire (Eq. 1.9) et les relations dans les représentations irréductibles (Eqs. 1.11).

A.2.1.1 Représentation A_1

Dans la représentation A_1 ,

$$E f(\rho, \theta) \stackrel{(1.11a)}{=} f(\rho, \theta) \Rightarrow A_n = A_n. \quad (\text{A.7a})$$

$$\begin{aligned} C_2 f(\rho, \theta) &= f(\rho, \theta + \pi) \stackrel{(1.11a)}{=} f(\rho, \theta) \iff \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n A_n J_n(\rho) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n J_n(\rho) e^{in\theta} \\ &\Rightarrow (-1)^n A_n = A_n, \text{ on a donc } A_{2n+1} = 0, \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (\text{A.7b})$$

$$\begin{aligned} \sigma_x f(\rho, \theta) &= f(\rho, -\theta) \stackrel{(1.11a)}{=} f(\rho, \theta) \iff \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n A_{-n} J_n(\rho) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n J_n(\rho) e^{in\theta} \\ &\Rightarrow (-1)^n A_{-n} = A_n, \text{ où seuls les } n \text{ pairs sont considérés, d'où } A_{2n} = A_{-2n}, \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (\text{A.7c})$$

$$\begin{aligned} \sigma_y f(\rho, \theta) &= f(\rho, \pi - \theta) \stackrel{(1.11a)}{=} f(\rho, \theta) \iff \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{2n} A_{-n} J_n(\rho) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n J_n(\rho) e^{in\theta} \\ &\Rightarrow A_{-n} = A_n, \text{ ce qui n'apporte rien de plus.} \end{aligned} \quad (\text{A.7d})$$

Alors les coefficients inconnus A_n ont les propriétés de parité suivantes :

$$A_{2n} = A_{-2n} \quad \text{et} \quad A_{2n+1} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.8})$$

On procède de façon similaire pour les représentations irréductibles A_2 , B_1 et B_2 .

A.2.1.2 Représentation A_2

On utilise les relations (Eqs. 1.11b) et on en déduit

$$A_{2n} = -A_{-2n} \quad \text{et} \quad A_{2n+1} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.9})$$

A.2.1.3 Représentation B_1

On utilise les relations (Eqs. 1.11c) et on en déduit

$$A_{2n+1} = -A_{-(2n+1)} \iff A_{2n-1} = -A_{-(2n-1)} \quad \text{et} \quad A_{2n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.10})$$

A.2.1.4 Représentation B_2

On utilise les relations (Eqs. 1.11d) et on en déduit

$$A_{2n+1} = A_{-(2n+1)} \iff A_{2n-1} = A_{-(2n-1)} \quad \text{et} \quad A_{2n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.11})$$

A.2.2 Expressions des champs scalaires dans les représentations irréductibles

Connaissant les propriétés de parité (Eqs. A.8 - A.11) des coefficients inconnus A_n (Eqs. A.6), on peut maintenant symétriser les expressions (Eqs. A.6) et réduire la somme de $-\infty$ à $+\infty$ à une somme de 0 à $+\infty$.

A.2.2.1 Représentation A_1

Dans la représentation A_1 , les indices n des coefficients inconnus sont pairs. On écrit

$$\begin{aligned} f^{A_1}(\rho, \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{2n} J_{2n}(\rho) e^{2in\theta} \\ &= \sum_{n=-1}^{-\infty} A_{2n} J_{2n}(\rho) e^{2in\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_{2n} J_{2n}(\rho) e^{2in\theta} + A_0 J_0(\rho) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} A_{-2n} J_{-2n}(\rho) e^{-2in\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_{2n} J_{2n}(\rho) e^{2in\theta} + A_0 J_0(\rho) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} A_{2n} J_{2n}(\rho) e^{-2in\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_{2n} J_{2n}(\rho) e^{2in\theta} + A_0 J_0(\rho) \quad \text{car } A_{2n} = A_{-2n} \text{ et } J_{-2n}(\rho) = (-1)^{2n} J_{2n}(\rho) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2A_{2n} J_{2n}(\rho) \cos(2n\theta) + A_0 J_0(\rho). \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$f^{A_1}(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n A_{2n} J_{2n}(\rho) \cos(2n\theta), \quad (\text{A.12})$$

où γ_n est le facteur de Neumann défini par $\gamma_0 = 1$ et $\gamma_n = 2$ pour $n > 0$.

A.2.2.2 Représentation A_2

Dans la représentation A_2 , les indices n sont pairs et on écrit

$$\begin{aligned}
 f^{A_2}(\rho, \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{2n} J_{2n}(\rho) e^{2in\theta} \\
 &= \sum_{n=-1}^{-\infty} A_{2n} J_{2n}(\rho) e^{2in\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_{2n} J_{2n}(\rho) e^{2in\theta} + A_0 J_0(\rho) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} A_{-2n} J_{-2n}(\rho) e^{-2in\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_{2n} J_{2n}(\rho) e^{2in\theta}(\rho) \quad \text{car } A_0 = 0 \\
 &= - \sum_{n=1}^{+\infty} A_{2n} J_{2n}(\rho) e^{-2in\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_{2n} J_{2n}(\rho) e^{2in\theta}(\rho) \quad \text{car } A_{2n} = -A_{-2n} \text{ et } J_{-2n}(\rho) = (-1)^{2n} J_{2n}(\rho) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2i A_{2n} J_{2n}(\rho) \sin(2n\theta).
 \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$f^{A_2}(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} i \gamma_n A_{2n} J_{2n}(\rho) \sin(2n\theta). \quad (\text{A.13})$$

A.2.2.3 Représentation B_1

Dans la représentation B_1 , les indices n sont impairs et on écrit

$$\begin{aligned}
 f^{B_1}(\rho, \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{2n+1} J_{2n+1}(\rho) e^{i(2n+1)\theta} \\
 &= \sum_{n=-1}^{-\infty} A_{2n+1} J_{2n+1}(\rho) e^{i(2n+1)\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_{2n+1} J_{2n+1}(\rho) e^{i(2n+1)\theta} + A_1 J_1(\rho) e^{i\theta} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} A_{-2n+1} J_{-2n+1}(\rho) e^{i(-2n+1)\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_{2n+1} J_{2n+1}(\rho) e^{i(2n+1)\theta} + A_1 J_1(\rho) e^{i\theta} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} A_{-(2n-1)} J_{-(2n-1)}(\rho) e^{-i(2n-1)\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_{2n+1} J_{2n+1}(\rho) e^{i(2n+1)\theta} + A_1 J_1(\rho) e^{i\theta} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} A_{(2n-1)} J_{(2n-1)}(\rho) e^{-i(2n-1)\theta} + \sum_{n=0}^{+\infty} A_{2n+1} J_{2n+1}(\rho) e^{i(2n+1)\theta} \\
 &\quad \text{car } A_{-(2n-1)} = -A_{2n-1} \text{ et } J_{-(2n-1)}(\rho) = (-1)^{2n-1} J_{2n-1}(\rho) = -J_{2n-1}.
 \end{aligned}$$

Dans le premier terme, on change n en $n + 1$. Ce terme s'écrit alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_{2n+1} J_{2n+1}(\rho) e^{-i(2n+1)\theta}.$$

Finalement, on a

$$f^{B_1}(\rho, \theta) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} A_{2n+1} J_{2n+1}(\rho) \cos((2n+1)\theta). \quad (\text{A.14})$$

A.2.2.4 Représentation B_2

Dans la représentation B_2 , les indices n sont impairs et on écrit

$$\begin{aligned}
 f^{B_2}(\rho, \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{2n+1} J_{2n+1}(\rho) e^{i(2n+1)\theta} \\
 &= \sum_{n=-1}^{-\infty} A_{2n+1} J_{2n+1}(\rho) e^{i(2n+1)\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_{2n+1} J_{2n+1}(\rho) e^{i(2n+1)\theta} + A_1 J_1(\rho) e^{i\theta} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} A_{-2n+1} J_{-2n+1}(\rho) e^{i(-2n+1)\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_{2n+1} J_{2n+1}(\rho) e^{i(2n+1)\theta} + A_1 J_1(\rho) e^{i\theta} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} A_{-(2n-1)} J_{-(2n-1)}(\rho) e^{-i(2n-1)\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_{2n+1} J_{2n+1}(\rho) e^{i(2n+1)\theta} + A_1 J_1(\rho) e^{i\theta} \\
 &= - \sum_{n=1}^{+\infty} A_{(2n-1)} J_{(2n-1)}(\rho) e^{-i(2n-1)\theta} + \sum_{n=0}^{+\infty} A_{2n+1} J_{2n+1}(\rho) e^{i(2n+1)\theta} \\
 &\text{car } A_{-(2n-1)} = A_{2n-1} \text{ et } J_{-(2n-1)}(\rho) = (-1)^{2n-1} J_{2n-1}(\rho) = -J_{2n-1}.
 \end{aligned}$$

Dans le premier terme, on change n en $n+1$. Ce terme s'écrit alors

$$- \sum_{n=0}^{+\infty} A_{2n+1} J_{2n+1}(\rho) e^{-i(2n+1)\theta}.$$

Finalement, on a

$$f^{B_2}(\rho, \theta) = 2i \sum_{n=0}^{+\infty} A_{2n+1} J_{2n+1}(\rho) \sin((2n+1)\theta). \quad (\text{A.15})$$

A.3 LES FONCTIONS DE STRUCTURE

Les fonctions de structure dépendent de l'angle θ et sont données par

$$\begin{aligned}
 a_n^S &= \frac{\rho_s}{\rho_f} x H_n^{(1)'}(x); & a_n^L &= x_L J_n'(x_L); & a_n^T &= -n J_n(x_T); & a_n^{inc} &= -\frac{\rho_s}{\rho_f} x J_n'(x); \\
 b_n^S &= \frac{\rho_s}{\rho_f} n H_n^{(1)}(x); & b_n^L &= n J_n(x_L); & b_n^T &= -x_T J_n'(x_T); & b_n^{inc} &= -\frac{\rho_s}{\rho_f} n J_n(x); \\
 c_n^S &= x_T^2 H_n^{(1)}(x); & c_n^{inc} &= -x_T^2 J_n(x); & c_n^L &= (x_T^2 - 2n^2) J_n(x_L) + 2x_L J_n'(x_L); & c_n^T &= 2n(x_T J_n'(x_T) - J_n(x_T)); \\
 d_n^L &= 2n(x_L J_n'(x_L) - J_n(x_L)); & d_n^T &= (x_T^2 - 2n^2) J_n(x_T) + 2x_T J_n'(x_T); \\
 e_n^S &= c_n^S; & e_n^{inc} &= c_n^{inc}; & e_n^L &= d_n^L; & e_n^T &= d_n^T; \\
 f_n^L &= (2x_L^2 - x_T^2 - 2n^2) J_n(x_L) + 2x_L J_n'(x_L); & f_n^T &= c_n^T; & f_n^T &= c_n^T;
 \end{aligned}$$

où $x = kr(\theta)$, $x_j = k_j r(\theta)$, $j \in \{L, T\}$, $n \in \mathbb{N}$ (n pair ou n impair).

A.4 RÉDUCTION DE LA SOMME SUR p ET RESTRICTION AU DOMAINE FONDAMENTAL

Soit $F_n(\theta)$, une fonction périodique de période 2π . On peut alors décomposer en série de Fourier $F_n(\theta)$ de la façon suivante :

$$F_n(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_{n,p} e^{ip\theta}, \quad \text{avec } f_{n,p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\theta) e^{-ip\theta} d\theta. \quad (\text{A.16})$$

En décomposant le problème sur les 4 représentations irréductibles du groupe \mathcal{C}_{2v} , les fonctions $F_n(\theta)$ qui apparaissent dans les calculs possèdent certaines propriétés (parité, invariance) qui nous permettent de restreindre les calculs au domaine fondamental. On ne se préoccupe pas ici de la parité de l'indice n mais il est évident qu'il faut en tenir compte lorsque l'on étudie la parité et l'invariance des fonctions.

Décomposons dans un premier temps la somme sur p :

$$\begin{aligned} F_n(\theta) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_{n,p} e^{ip\theta} = \sum_{p=-1}^{-\infty} f_{n,p} e^{ip\theta} + \sum_{p=+1}^{+\infty} f_{n,p} e^{ip\theta} + f_{n,0} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} f_{n,-p} e^{-ip\theta} + \sum_{p=+1}^{+\infty} f_{n,p} e^{ip\theta} + f_{n,0}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

1. Si $F_n(\theta)$ est paire en θ , on a $f_{n,-p} = f_{n,p}$ et $f_{n,0} \neq 0$. Alors $F_n(\theta)$ donnée par l'équation (A.17) s'écrit

$$F_n(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_{n,p} e^{ip\theta} = \sum_{p=0}^{+\infty} \gamma_p f_{n,p} \cos(p\theta), \quad (\text{A.18})$$

avec

$$f_{n,p} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F_n(\theta) \cos(p\theta) d\theta. \quad (\text{A.19})$$

On obtient l'expression (Eq. A.19) en écrivant $e^{-ip\theta} = \cos(p\theta) - i \sin(p\theta)$. On sépare l'intégrale et on utilise la parité des fonctions $F_n(\theta) \cos(p\theta)$ et $F_n(\theta) \sin(p\theta)$. La seconde ne contribue pas car on intègre une fonction impaire sur un intervalle centré en 0. On peut également décomposer $f_{n,p}$ donné par l'équation (A.19) de la façon suivante

$$f_{n,p} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_n(\theta) \cos(p\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} F_n(\theta) \cos(p\theta) d\theta. \quad (\text{A.20})$$

Dans le second terme, on change θ en $\pi - \theta$ et deux cas se présentent alors :

- a. Si $F_n(\theta) = F_n(\pi - \theta)$, on a

$$f_{n,p} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + (-1)^p) F_n(\theta) \cos(p\theta) d\theta \quad (\text{A.21})$$

qui est non nulle si p est pair. On obtient finalement

$$F_n(\theta) = \sum_{p \text{ pair}} \gamma_p f_{n,p} \cos(p\theta) \quad \text{avec } f_{n,p} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_n(\theta) \cos(p\theta) d\theta. \quad (\text{A.22})$$

On vérifie explicitement que le domaine d'intégration est réduit au domaine fondamental.

b. Si $F_n(\theta) = -F_n(\pi - \theta)$, on a

$$f_{n,p} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - (-1)^p) F_n(\theta) \cos(p\theta) d\theta \quad (\text{A.23})$$

qui est non nulle si p est impair. On obtient finalement

$$F_n(\theta) = \sum_{p \text{ impair}} 2f_{n,p} \cos(p\theta) \text{ avec } f_{n,p} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_n(\theta) \cos(p\theta) d\theta. \quad (\text{A.24})$$

2. Si $F_n(\theta)$ est impaire en θ , on a $f_{n,-p} = -f_{n,p}$ et $f_{n,0} = 0$. Alors $F_n(\theta)$ donnée par l'équation (A.17) s'écrit

$$F_n(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_{n,p} e^{ip\theta} = \sum_{p=0}^{+\infty} 2i f_{n,p} \sin(p\theta) \quad (\text{A.25})$$

avec

$$f_{n,p} = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\pi} F_n(\theta) \sin(p\theta) d\theta. \quad (\text{A.26})$$

L'expression (A.26) est obtenue en procédant de la même façon que pour obtenir l'expression (Eq. A.19). En décomposant l'intégrale dans l'expression (Eq. A.26), et en faisant le changement θ en $\pi - \theta$, on a alors

a. si $F_n(\theta) = F_n(\pi - \theta)$, p doit être impair. On obtient alors :

$$F_n(\theta) = \sum_{p \text{ impair}} 2i f_{n,p} \sin(p\theta) \text{ avec } f_{n,p} = -\frac{2i}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_n(\theta) \sin(p\theta) d\theta; \quad (\text{A.27})$$

b. si $F_n(\theta) = -F_n(\pi - \theta)$, p doit être pair. On obtient alors

$$F_n(\theta) = \sum_{p \text{ pair}} 2i f_{n,p} \sin(p\theta) \text{ avec } f_{n,p} = -\frac{2i}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_n(\theta) \sin(p\theta) d\theta. \quad (\text{A.28})$$

Remarque : $\gamma_{2p} = \gamma_p$ et $\gamma_{2p+1} = 2$.

A.5 COEFFICIENTS DE FOURIER POUR LE PROBLÈME INTÉRIEUR

Les coefficients de Fourier sont évalués numériquement sur le domaine fondamental à partir des expressions

$$\beta_{n,p}^j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(c_n^j \cos(n\theta) n_\rho + d_n^j \sin(n\theta) n_\theta \right) \cos(p\theta) d\theta \quad (\text{A.29})$$

$$\xi_{n,p}^j = -\frac{2i}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(d_n^j \sin(n\theta) n_\rho - f_n^j \cos(n\theta) n_\theta \right) \sin(p\theta) d\theta \quad (\text{A.30})$$

$$\alpha_{n,p}^L = -\frac{2i}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(c_n^L \sin(n\theta) n_\rho - d_n^L \cos(n\theta) n_\theta \right) \sin(p\theta) d\theta \quad (\text{A.31})$$

$$\alpha_{n,p}^T = -\frac{2i}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-c_n^T \sin(n\theta) n_\rho + d_n^T \cos(n\theta) n_\theta \right) \sin(p\theta) d\theta \quad (\text{A.32})$$

$$\eta_{n,p}^L = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-d_n^L \cos(n\theta) n_\rho - f_n^L \sin(n\theta) n_\theta \right) \cos(p\theta) d\theta \quad (\text{A.33})$$

$$\eta_{n,p}^T = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(d_n^T \cos(n\theta) n_\rho + f_n^T \sin(n\theta) n_\theta \right) \cos(p\theta) d\theta \quad (\text{A.34})$$

$j \in \{L, T\}$, $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ ((n, p) pairs ou (n, p) impairs).

A.6 COEFFICIENTS DE FOURIER POUR LA DIFFUSION

Les coefficients de Fourier sont évalués numériquement sur le domaine fondamental à partir des expressions

$$\alpha_{n,p}^{(j)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-a_n^{(j)} \cos(n\theta) n_\rho + b_n^{(j)} \sin(n\theta) n_\theta \right) \cos(p\theta) d\theta \quad j \in \{L, T, S, inc\} \quad (\text{A.35})$$

$$\beta_{n,p}^{(j)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(c_n^{(j)} \cos(n\theta) n_\rho + d_n^{(j)} \sin(n\theta) n_\theta \right) \cos(p\theta) d\theta \quad j \in \{L, T\} \quad (\text{A.36})$$

$$\beta_{n,p}^{(j)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(c_n^{(j)} \cos(n\theta) n_\rho \right) \cos(p\theta) d\theta \quad j \in \{S, inc\} \quad (\text{A.37})$$

$$\zeta_{n,p}^{(j)} = \frac{-2i}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e_n^{(j)} \sin(n\theta) n_\rho - f_n^{(j)} \cos(n\theta) n_\theta \right) \sin(p\theta) d\theta \quad j \in \{L, T\} \quad (\text{A.38})$$

$$\zeta_{n,p}^{(j)} = \frac{-2i}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e_n^{(j)} \cos(n\theta) n_\theta \right) \sin(p\theta) d\theta \quad j \in \{S, inc\} \quad (\text{A.39})$$

$$\kappa_{n,p}^{(j)} = \frac{-2i}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a_n^{(j)} \sin(n\theta) n_\rho + b_n^{(j)} \cos(n\theta) n_\theta \right) \sin(p\theta) d\theta \quad j \in \{L, T, S, inc\} \quad (\text{A.40})$$

$$\eta_{n,p}^{(j)} = \frac{-2i}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(c_n^{(j)} \sin(n\theta) n_\rho - d_n^{(j)} \cos(n\theta) n_\theta \right) \sin(p\theta) d\theta \quad j \in \{L, T\} \quad (\text{A.41})$$

$$\eta_{n,p}^{(j)} = \frac{-2i}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(c_n^{(j)} \sin(n\theta) n_\rho \right) \sin(p\theta) d\theta \quad j \in \{S, inc\} \quad (\text{A.42})$$

$$\zeta_{n,p}^{(j)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e_n^{(j)} \cos(n\theta) n_\rho + f_n^{(j)} \sin(n\theta) n_\theta \right) \cos(p\theta) d\theta \quad j \in \{L, T\} \quad (\text{A.43})$$

$$\zeta_{n,p}^{(j)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e_n^{(j)} \sin(n\theta) n_\theta \right) \cos(p\theta) d\theta \quad j \in \{S, inc\} \quad (\text{A.44})$$

$(n, p) \in \mathbb{N}^2$ ((n, p) pairs ou (n, p) impairs).

A.7 CALCULS DES LONGUEURS DES ORBITES PÉRIODIQUES SELON SIEBER

Les longueurs des orbites périodiques de pression pure et de cisaillement pur peuvent être calculées en utilisant les expressions données par Sieber [Sieber 1997]. On considère un billard elliptique dont la frontière est une ellipse de demi petit-axe a et demi grand-axe b . On note $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ la demi distance interfocale (Fig. A.1). Le système possède deux quantités conservées : l'énergie et le produit $L_1 L_2$ des deux moments angulaires par rapport aux deux foyers. Il est cependant plus avantageux de travailler avec une autre quantité qui est indépendante de l'énergie et qui est déterminée uniquement par les propriétés géométriques de la trajectoire $\alpha = \frac{L_1 L_2}{E}$ où E est l'énergie totale du système. Les trajectoires dans le billard possèdent deux caustiques qui dépendent du signe de α .

Mouvement de rotation $0 < \alpha \leq b^2$

La caustique du mouvement est une ellipse confocale de demi petit axe $b' = \sqrt{\alpha}$ et de demi grand axe $a' = \sqrt{c^2 + \alpha}$. Le mouvement s'opère autour des deux foyers et il est composé d'une *libration* pour la coordonnées elliptique u et d'une rotation pour la coordonnée elliptique v (Annexe A.1). On détermine α en satisfaisant la condition pour obtenir des

orbites périodiques

$$\sqrt{\frac{b^2 - \alpha}{b^2}} = sn\left(\frac{2m}{n}K(\kappa), \kappa\right) \quad (\text{A.45})$$

où $sn(u)$ est la fonction elliptique jacobienne, $n = 3, 4, \dots$ et $1 \leq m < \frac{n}{2}$, et les entiers n et m sont respectivement le nombre de réflexions d'une orbite et son nombre de rotations. Les longueurs des orbites périodiques sont alors données par

$$\ell_{n,m}^r = \frac{2na}{b} \sqrt{b^2 - \alpha} - \frac{2nc}{\kappa} E\left(\arcsin \sqrt{\frac{b^2 - \alpha}{b^2}}, \kappa\right) + 4\frac{mc}{\kappa} E\left(\frac{\pi}{2}, \kappa\right) \quad (\text{A.46})$$

Mouvement de libration $-c^2 < \alpha \leq 0$

La caustique du mouvement est une hyperbole confocale de demi petit axe conjugué $b' = \sqrt{-\alpha}$ et de demi axe transverse $a' = \sqrt{c^2 + \alpha}$. Le mouvement se fait autour des deux foyers et il est composé d'une libration pour la coordonnées elliptique u et d'une libration pour la coordonnées elliptique v , et la trajectoire croise toujours l'axe x entre les deux foyers. On détermine α en satisfaisant la condition pour obtenir des orbites périodiques

$$\sqrt{\frac{b^2}{b^2 - \alpha}} = sn\left(\frac{2m}{n}K\left(\frac{1}{\kappa}\right), \frac{1}{\kappa}\right) \quad (\text{A.47})$$

où $sn(u)$ est la fonction elliptique jacobienne, $n = 4, 6, \dots$ et $1 \leq m < \frac{n}{2}$, où les entiers n et m sont respectivement le nombre de réflexions d'une orbite et son *nombre de libration* (la moitié du nombre de fois où la trajectoire est tangente à la caustique). Les longueurs des orbites périodiques sont alors données par

$$\ell_{n,m}^\ell = \frac{2nab}{\sqrt{b^2 - \alpha}} - 2ncE\left(\arcsin \sqrt{\frac{b^2}{b^2 - \alpha}}, \frac{1}{\kappa}\right) + 4mcE\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\kappa}\right). \quad (\text{A.48})$$

Dans les équations (A.45), (A.46), (A.47), et (A.48), la variable κ est donnée par $\kappa = \frac{c}{\sqrt{c^2 + \alpha}}$ et les deux types de mouvements sont séparés par une séparatrice associée à des orbites avec $\alpha = 0$ et passant par les foyers. Le cas $m = \frac{n}{2}$ est discuté dans la référence [Sieber 1997].

Les longueurs des orbites périodiques de pression pure ou de cisaillement pur sont données par

$$\ell_{n,m}^L = \frac{c_{eau}}{c_L} \ell_{n,m}^i \quad (\text{A.49a})$$

$$\ell_{n,m}^T = \frac{c_{eau}}{c_T} \ell_{n,m}^i \quad (\text{A.49b})$$

où $i = \{r, \ell\}$.

BIBLIOGRAPHIE

- M. Abramowitz et I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Courier Dover Publications, 1964. (Cité page 2)
- J. D. Achenbach. *Wave propagation in elastic solids*. Elsevier science publishers B.V., 1975. (Cité pages 104 et 109)
- A. M. Aindow, R. J. Dewhurst, D. A. Hutchins, et S. B. Palmer. Laser-generated ultrasonic pulses at free metal surfaces. *J. Acoust. Soc. Am.*, 69(2) :449–455, 1981. (Cité page 89)
- S. Ancey. *Résonances en géométrie elliptique : développements asymptotiques exponentiellement améliorés et levée de dégénérescence*. Thèse de doctorat, Université de Corse - Pascal Paoli, 2000. (Cité page 3)
- S. Ancey, E. Bazzali, P. Gabrielli, et M. Mercier. Elastodynamics and resonances in elliptical geometry. *J. Phys. A : Math. Theor.*, 46(43), 2013. (Cité page 127)
- S. Ancey, E. Bazzali, P. Gabrielli, et M. Mercier. Acoustic scattering by elastic cylinders of elliptical cross-section and splitting up of resonances. *J. Appl. Phys.*, 115(19), 2014. (Cité page 127)
- S. Ancey, A. Folacci, et P. Gabrielli. Whispering-gallery modes and resonances of an elliptic cavity. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 34 :2657, 2001. (Cité page 3)
- K. I. Arita, A. Sugita, et K. Matsuyanagi. Periodic-orbit bifurcation and shell structure at exotic deformation. Dans *Proceedings of Internal Symposium on Atomic nuclei and metallic clusters : finite many-fermion systems*, 1997. (Cité pages 2 et 121)
- K. I. Arita, A. Sugita, et K. Matsuyanagi. Semiclassical origin of superdeformed shell structure in the spheroidal cavity model. *Progr. Theoret. Phys.*, 100(6) :1223–1238, 1998. (Cité pages 2, 116, 117 et 121)
- K. I. Arita, A. Sugita, et K. Matsuyanagi. Periodic orbits and deformed shell structure. Dans *Proceedings of the conference on Frontiers of nuclear structure*, 2002. (Cité page 2)
- J. D. Aussel. *Génération par laser d’ondes ultrasonores dans les matériaux : application au contrôle non destructif*. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 1986. (Cité page 90)
- R. Balian et C. Bloch. Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain III : Eigenfrequencies density oscillations. *Ann. Phys.*, 69 :76–160, 1972. (Cité page 116)
- E. Bogomolny et E. Hugues. Semiclassical theory of flexural vibrations of plates. *Phys. Rev. E*, 57 :5404–5424, 1998. (Cité page 35)
- O. Bohigas, O. Legrand, C. Schmidt, et D. Sornette. Comments on spectral statistics in elastodynamics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89 :1456–1458, 1991. (Cité page 3)

- J. J. Bowman, T. B. A. Senior, P. L. E. Uslenghi, et J. S. Asvestas. *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes*. North-Holland Pub. Co., 1970. (Cité page 1)
- M. Brack et R. K. Bhaduri. *Semiclassical physics*. Addison-Wesley, 1997. (Cité pages 34, 35, 36, 42 et 116)
- P. S. Casas et R. Ramírez-Ros. Classification of symmetric periodic trajectories in ellipsoidal billiards. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 22(2), 2012. (Cité page 2)
- P. A. Chinnery et V. F. Humphrey. Fluid column resonances of water-filled cylindrical shells of elliptical cross section. *J. Acoust. Soc. Am.*, 103(3), 1998. (Cité pages 1 et 3)
- D. Clorennec. *Génération et détection optiques d'ondes guidées sur une pièce cylindrique. Application au contrôle non destructif sans contact*. Thèse de doctorat, Université Paris 7 - Denis Diderot, 2002. (Cité page 5)
- D. Clorennec et D. Royer. Analysis of surface acoustic wave propagation on a cylinder using laser ultrasonics. *Appl. Phys. Lett.*, 82(25), 2003. (Cité page 5)
- D. Clorennec et D. Royer. Investigation of surface acoustic wave propagation on a sphere using laser ultrasonics. *Appl. Phys. Lett.*, 85(12), 2004. (Cité pages 5 et 90)
- D. Clorennec, D. Royer, et H. Walaszek. Nondestructive evaluation of cylindrical parts using laser ultrasonics. *Ultrasonics*, 40 :783–789, 2002. (Cité page 5)
- C. Corbel, F. Guillois, D. Royer, M. fink, et R. De Mol. Laser-generated elastic waves in carbon-epoxy composite. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 40(6) :710–716, 1993. (Cité page 89)
- J. F. Cornwell. *Group Theory in Physics : An Introduction (Volumes 1 et 2)*. Academic Press, 1997. (Cité page 2)
- P. Cvitanović et B. Eckhardt. Symmetry decomposition of chaotic dynamics. *Nonlinearity*, 6 (2) :277, 1993. (Cité page 2)
- F. A. Dahlen. The normal modes of a rotating, elliptical earth. *Geophys. J. Roy. Astr. S.*, 16(4) : 329–367, 1968. (Cité page 114)
- F. A. Dahlen. *Theoretical Global Seismology*. Princeton University Press, 1998. (Cité page 3)
- S. J. Davies, C. Edwards, G. S. Taylor, et S. B. Palmer. Laser-generated ultrasound : its properties, mechanisms and multifarious applications. *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 26(3) :329, 1993. (Cité page 87)
- Y. Decanini, A. Folacci, P. Gabrielli, et J. L. Rossi. Algebraic aspects of multiple scattering by two parallel cylinders : classification and physical interpretation of scattering resonances. *J. Sound Vib.*, 221 :785–804, 1999. (Cité page 3)
- J. C. Diels, W. Rudolph, P.F. Liao, et P. Kelley. *Ultrashort Laser Pulse Phenomena*. Optics and photonics. Elsevier Science, 2006. (Cité page 95)
- P. T. DiPerna et T. K. Stanton. Sound scattering by cylinders of noncircular cross section : A conformal mapping approach. *J. Acoust. Soc. Am.*, 96 :3064–3079, 1994. (Cité page 1)
- M. Dupuis, R. Mazo, et L. Onsager. Surface specific heat of an isotropic solid at low temperatures. *J. Chem. Phys.*, 33(5), 1960. (Cité page 34)

- C. Ellegaard, T. Guhr, K. Lindemann, H. Q. Lorensen, J. Nygard, et M. Oxborrow. Spectral statistics of acoustic resonances in aluminium blocks. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :1546–1549, 1995. (Cité page 3)
- C. Ellegaard, T. Guhr, K. Lindemann, J. Nygard, et M. Oxborrow. Symmetry breaking and spectral statistics of acoustic resonances in quartz blocks. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :4918–4921, 1996. (Cité page 3)
- A. C. Eringen et E. S. Suhubi. *Elastodynamics. Vol. 2 : Linear Theory*. New York-London, Academic Press., 1975. (Cité page 111)
- R. P. Feynman. *The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1. Mainly mechanics, radiation and heat*. Addison-Wesley, 1963. (Cité page 36)
- E. Fournier. *Aspects algébriques de la diffusion multiple*. Thèse de doctorat, Université de Corse - Pascal Paoli, 1999. (Cité page 4)
- P. Gabrielli et M. Mercier-Finidori. Acoustic scattering by two spheres : multiple scattering and symmetry considerations. *J. Sound Vib.*, 241(3) :423–439, 2001. (Cité page 3)
- P. Gaspard et S. A. Rice. Exact quantization of the scattering from a classically chaotic repeller. *J. Chem. Phys.*, 90(4) :2255–2262, 1989. (Cité page 2)
- C. Giangreco. *Mesures acoustiques appliquées aux antennes sonar*. Technique et Documentation - Lavoisier, 1997. (Cité page 70)
- G. C. Goel et D. L. Jain. Scattering of plane waves by a penetrable elliptic cylinder. *J. Acoust. Soc. Am.*, 69(2) :371–379, 1981. (Cité page 1)
- K. F. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids*. Dover Books on Engineering, 1975. (Cité pages 104 et 109)
- R. H. Hackman. The transition matrix for acoustic and elastic wave scattering in prolate spheroidal coordinates. *J. Acoust. Soc. Am.*, 75(1) :35–45, 1984. (Cité page 2)
- M. Hamermesh. *Group Theory and its Application to Physical Problems*. New York : Dover, 1989. (Cité pages 2, 7 et 10)
- V. Heine. *Group theory in quantum mechanics*. London : Pergamon, 1960. (Cité page 2)
- J. Hernández-Rosas, M. Picquart, E. Haro-Poniatowski, M. Kanehisa, M. Jouanne, et J-F. Morhange. Elastic vibrations of spheroidal nanometric particles. *J. Phys. : Condens. Matter*, 15(44) :7481, 2003. (Cité page 1)
- D. A. Hutchins, R. J. Dewhurst, et S. B. Palmer. Directivity patterns of laser-generated ultrasound in aluminum. *J. Acoust. Soc. Am.*, 70(5) :1362–1369, 1981. (Cité pages 89 et 90)
- P. Jaerish. *J. F. Maths (Crelle)*, 88 :131, 1880. (Cité page 1)
- X. Jia, D. Royer, et G. Quentin. Pulsed laser excitation and optical detection of rayleigh waves on a metallic sphere. Dans *Journal de Physique IV*, 1992. (Cité page 90)
- C. H. Joyner, S. Müller, et M. Sieber. Semiclassical approach to discrete symmetries in quantum chaos. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 45(20) :205102, 2012. (Cité page 2)

- F. M. Kahnert, J. J. Stamnes, et K. Stamnes. Application of the extended boundary condition method to homogeneous particles with point-group symmetries. *Appl. Opt.*, 40(18) :3110–3123, 2001. (Cité page 2)
- M. Kahnert. Irreducible representations of finite groups in the T-matrix formulation of the electromagnetic scattering problem. *J. Opt. Soc. Am. A*, 22(6) :1187–1199, 2005. (Cité page 2)
- M. Kahnert. T-matrix computations for particles with high-order finite symmetries. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 123 :79 – 91, 2013. (Cité page 2)
- Michael Kahnert et Tom Rother. Modeling optical properties of particles with small-scale surface roughness : combination of group theory with a perturbation approach. *Opt. Express*, 19(12) :11138–11151, Jun 2011. (Cité page 2)
- H. Lamb. On the vibrations of an elastic sphere. Dans *Proc. London Math. Soc.*, numéro 13, pages 189–212. London Mathematical Society, 1882. (Cité page 1)
- L. Landau et E. Lifchitz. *Physique théorique, tome 7. Théorie de l'élasticité*. Librairie du Globe, ed. MIR, 1990. (Cité pages 22 et 35)
- L. D. Landau et E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics*. Oxford : Pergamon, 1975. (Cité page 2)
- T. Lay et T. C. Wallace. *Modern Global Seismology*. Academic Press, 1995. (Cité page 112)
- F. Léon, F. Chati, et J. M. Conoir. Modal theory applied to the acoustic scattering by elastic cylinders of arbitrary cross section. *J. Acoust. Soc. Am.*, 116(2), 2004. (Cité pages 1, 2 et 63)
- F. Leyvraz, C. Schmit, et T. H. Seligman. Anomalous spectral statistics in a symmetrical billiard. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 29(22) :L575, 1996. (Cité page 2)
- A. E. H. Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover Books on Engineering, 1906. (Cité page 1)
- A. G. Magner, K. I. Arita, S. N. Fedotkin, et K. Matsuyanagi. Symmetry breaking and bifurcations in the periodic orbit theory. II spheroidal cavity. *Progr. Theoret. Phys.*, 108(5), 2002. (Cité pages 2 et 117)
- A. G. Magner, S. N. Fedotkin, K. I. Arita, T. Misu, K. Matsuyanagi, T. Schachner, et M. Brack. Symmetry breaking and bifurcations in the periodic orbit theory. I elliptic billiard. *Progr. Theoret. Phys.*, 102(3), 1999. (Cité pages 2 et 42)
- T. H. Maiman. Stimulated optical radiation in ruby. *Nature*, 187(4736) :493–494, 1960. (Cité page 87)
- F. P. Mechel. *Mathieu functions : formulas, generation, use*. S. Hirzel Verlag Stuttgart, 1997. (Cité page 2)
- G. F. Miller et H. Pursey. The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid. Dans *Proc. R. Soc. Lond. A*, volume 223, page 521. Royal Society, 1954. (Cité page 89)
- J. P. Monchalín. Laser ultrasonics : From the laboratory to industry. Dans *AIP Conf. Proc.*, volume 700, pages 3–31. AIP, 2004a. (Cité page 87)
- J. P. Monchalín. Non contact generation and detection of ultrasound with lasers. Dans *Proceedings of the 16th World Conference on Nondestructive Testing*, 2004b. (Cité page 87)

- P. J. Moser et H. Überall. Complex eigenfrequencies of axisymmetric, perfectly conducting bodies : Radar spectroscopy. Dans *Proc. IA*, volume 71, pages 171–172. IEEE, 1983. (Cité page 3)
- M. A. Naïmark et A. I. Stern. *Theory of group representations*. New York : Springer, 1982. (Cité page 9)
- P. A. P. Nghiem et R. A. García. La sismologie : Qu'est-ce que c'est ? a quoi cela sert-il ? URL <http://irfu.cea.fr/>. (Cité page 112)
- H. Nishioka, N. Nitanda, M. Ohta, et S. Okai. *Mem. Konan Univ., Sci. Ser.*, 39(2), 1992. (Cité page 2)
- H. Nishioka, M. Ohta, et S. Okai. *Mem. Konan Univ., Sci. Ser.*, 38(2), 1991. (Cité page 2)
- H. M. Nussenzveig. *Diffraction Effects in Semiclassical Scattering*. Cambridge University Press, 1992. (Cité page 29)
- A. Pereira, A. Tadeu, et J. Antonio. Influence of the cross-section geometry of a cylindrical solid submerged in an acoustic medium on wave propagation. *Wave Motion*, 36 :23–39, 2002. (Cité page 1)
- T. A. K. Pillai, V. V. Varadan, et V. K. Varadan. Sound scattering by rigid and elastic infinite elliptical cylinders in water. *J. Acoust. Soc. Am.*, 72(3), 1982. (Cité page 1)
- B. Pouet. *Modélisation physique par ultrasons laser. Application à la modélisation sismique*. Thèse de doctorat, Université Paris 7 - Denis Diderot, 1991. (Cité pages 89 et 90)
- R. P. Raddlinski et M. M. Simon. Acoustic and elastic wave scattering from elliptic-cylindrical shells. *J. Acoust. Soc. Am.*, 93 :2443–2453, 1993. (Cité page 1)
- R. H. Rand. Torsional vibrations of elastic prolate spheroids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 44(3) : 749–751, 1968. (Cité page 1)
- J. F. Ready. *Effects of High Power Laser Radiation*. Academic Press, 1971. (Cité page 88)
- D. Royer. Génération et détection optiques d'ondes élastiques, 1996. URL <http://www.techniques-ingenieur.fr/>. (Cité pages ix, 87, 89, 90 et 91)
- D. Royer et D. Clorennec. Theoretical and experimental investigation of rayleigh waves on spherical and cylindrical surfaces. Dans *Proceedings of Laser Ultrasonics, Montréal*, 2008. (Cité page 5)
- D. Royer, E. Dieulesaint, X. Jia, et Y. Shui. Optical generation and detection of surface acoustic waves on a sphere. *Appl. Phys. Lett.*, 52 :706, 1988. (Cité pages 5 et 90)
- Y. Safarov et D. Vassilev. *The Asymptotic Distribution of Eigenvalues of Partial Differential Operators*. Dimacs Series in Discrete Mathematics and Theoretical Comput. American Mathematical Society, 1997. (Cité pages 34 et 117)
- L. Saviot et D. B. Murray. Longitudinal versus transverse spheroidal vibrational modes of an elastic sphere. *Phys. Rev B*, 72(20) :205433.1–205433.6, 2005. (Cité page 1)
- F. M. Schulz, K. Stamnes, et J. J. Stamnes. Point-group symmetries in electromagnetic scattering. *J. Opt. Soc. Am. A*, 16(4) :853–865, 1999. (Cité page 2)

- J. P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, Éd. des Sciences et des Arts, 1978. (Cité page 9)
- M. Sieber. Semiclassical transition from an elliptical to an oval billiard. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 30 :4563–4596, 1997. (Cité pages 2, 35, 42, 139 et 140)
- M. M. Simon et R. P. Raddlinski. Elastic wave scattering from elliptical shells. *J. Acoust. Soc. Am.*, 71 :273–281, 1982. (Cité page 1)
- A. Tamura, K. Higeta, et T. Ichinokawa. Lattice vibrations and specific heat of a small particle. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 15(24) :4975, 1982. (Cité page 3)
- G. Tanner et N. Søndergaard. Wave chaos in the elastic disk. *Phys. Rev. E*, 66(066211), 2002. (Cité pages 1 et 35)
- V. V. Varadan. Scattering matrix for elastic waves. II. Application to elliptic cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.*, 63(4), 1978. (Cité pages 1 et 2)
- V. V. Varadan. *Elastic wave scattering (Acoustic, Electromagnetic and Elastic Waves Scattering-Focused on the T-Matrix Approach)*. Pergamon, New York, 1980. (Cité pages 1 et 2)
- V. V. Varadan et V. K. Varadan. Scattering matrix for elastic waves. III. Application to spheroids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 65(4), Apr. 1979. (Cité page 2)
- V. V. Varatharajulu et Y. H. Pao. Scattering matrix for elastic waves. I. Theory. *J. Acoust. Soc. Am.*, 60(3), 1976. (Cité pages 1 et 2)
- N. D. Veksler. *Resonance acoustic spectroscopy*. Springer-Verlag, 1993. (Cité page 1)
- N. D. Veksler, B. Dubus, et A. Lavie. Acoustic wave scattering by an ellipsoidal shell. *Acoust. Phys.*, 45 :46–51, 1999. (Cité page 1)
- W. M. Visscher, A. Migliori, T. M. Bell, et R. A. Reiner. On the normal modes of free vibration of inhomogeneous and anisotropic elastic objects. *J. Acoust. Soc. Am.*, 90(4) :2154–2162, 1991. (Cité page 1)
- I. Vladoiu, M. Stafe, C. Negutu, et I. M. Popescu. The dependence of the ablation rate of metals on nanosecond laser fluence and wavelength. *J. Optoelectron. Adv. Mater.*, 10(12) : 3177–3181, 2008. (Cité page 96)
- R. L. Weaver. Spectral statistics in elastodynamics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 85 :1005–1013, 1989. (Cité page 3)
- R. M. White. Generation of elastic waves by transient surface heating. *J. Appl. Phys.*, 34(12) : 3559–3567, 1963. (Cité page 87)
- E. T. Whittaker et G. N. Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge University Press, 1927. (Cité pages 29 et 63)
- E. P. Wigner. *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*. Academic Press, 1959. (Cité page 2)
- A. Wirzba, N. Søndergaard, et P. Cvitanović. Wave chaos in elastodynamic cavity scattering. *Europhys. Lett.*, 72(4) :534, 2005. (Cité page 2)
- Wolfram. URL <http://www.wolfram.com/mathematica/>. (Cité page 38)

- O. Xeridat. *Étude expérimentale de la propagation, de la diffusion et de la localisation des ondes de Lamb*. Thèse de doctorat, Université Nice Sophia Antipolis, 2011. (Cité page 96)
- J. W. Young et J. C. Bertrand. Multiple scattering by two cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.*, 58 : 1190–1195, 1975. (Cité page 29)
- P. Zhang, C.F. Ying, et J. Shen. Directivity patterns of laser thermoelastically generated ultrasound in metal with consideration of thermal conductivity. *Ultrasonics*, 35(3) :233 – 240, 1997. (Cité page 89)

Titre Résonances d'objets élastiques en géométries elliptique et sphéroïdale : symétrie et levée de dégénérescence

Résumé Le thème central de cette thèse est l'étude des résonances pour le problème intérieur en élastodynamique (géométries elliptique et sphéroïdale), et pour le problème de diffusion en acoustique (géométrie elliptique). On s'intéresse en particulier à la levée de dégénérescence des résonances liée à la brisure de symétrie de l'objet lors de la transition du disque circulaire vers le disque elliptique (2D), et de la sphère vers le sphéroïde (3D). Ce phénomène est étudié et interprété d'un point de vue théorique en prenant en compte les symétries de l'objet à l'aide de la théorie des groupes. Cette approche est complétée par une modélisation numérique et une partie expérimentale.

En 2D, nous étudions le problème intérieur pour un disque elliptique élastique (étude des modes résonants) et le problème de la diffusion acoustique par des cylindres elliptiques infinis élastiques. Ils sont traités à partir du formalisme modal combiné à la théorie des groupes dans le contexte vectoriel de l'élastodynamique. La levée de dégénérescence des résonances, liée à la brisure de la symétrie circulaire, est observée théoriquement mais aussi expérimentalement pour le problème de diffusion. La méthode simplifie considérablement le traitement numérique des problèmes étudiés, fournit une classification des résonances selon les 4 représentations irréductibles du groupe de symétrie C_{2v} (associé à la géométrie elliptique) et donne une interprétation physique de la levée de dégénérescence en termes de brisure de symétrie du groupe $O(2)$ (invariance par rotation).

Une partie expérimentale en spectroscopie ultrasonore vient compléter l'étude théorique du problème de diffusion. Une série d'expériences en cuve est menée dans le cas de cylindres elliptiques de différentes excentricités en aluminium immergés dans l'eau, dans la bande de fréquence $0 \leq kr \leq 50$, où kr est le nombre d'onde réduit dans le fluide. Les résultats expérimentaux présentent un très bon accord avec les résultats théoriques, la levée de dégénérescence est observée expérimentalement sur des fonctions de forme et mise en évidence sur des diagrammes angulaires.

Le problème intérieur en 3D est traité par une approche expérimentale basée sur la génération et la détection optiques d'ondes élastiques. Une série d'expérimentations sur des objets tridimensionnels en aluminium est réalisée. Ces objets (sphère, sphéroïdes de formes oblate et prolata de différentes excentricités) sont mis en vibration par impacts laser et les mesures de vitesse et de fréquence s'effectuent par vibrométrie laser. On réalise ainsi une comparaison qualitative entre la théorie 2D et l'expérience 3D. Les mesures sont menées à la fois dans les domaines temporel et fréquentiel pour mettre en évidence la levée de dégénérescence des résonances d'une part, et l'onde de Rayleigh qui se propage sur la surface des objets d'autre part. Nous identifions deux trajets pour cette onde en géométrie sphéroïdale, l'un circulaire et l'autre elliptique.

Enfin, dans le cadre des problèmes intérieurs 2D et 3D, on donne une interprétation en termes de rayons à travers la « dualité » entre le spectre des résonances et le spectre des longueurs des orbites périodiques, avec la mise en évidence du phénomène de conversion de mode et l'identification de l'onde de Rayleigh. Un phénomène, nouveau à notre connaissance, vient s'ajouter au phénomène de bifurcation de certaines orbites périodiques. Les orbites avec conversion de mode du disque circulaire élastique se séparent en deux orbites lorsqu'on le déforme vers le disque elliptique. Les longueurs de ces deux orbites sont associées aux trajets minimal et maximal qu'elles parcourent. Cette observation s'interprète comme une conséquence du théorème de Fermat. Dans le cas du sphéroïde, on retrouve les orbites du disque circulaire dans le plan équatorial et celles du disque elliptique dans le plan méridien. Nous mettons également en évidence les pics associés aux deux trajets parcourus par l'onde de Rayleigh en géométrie sphéroïdale sur le spectre des orbites périodiques.

Mots-clés Elastodynamique, résonances, diffusion acoustique, spectroscopie ultrasonore, levée de dégénérescence, orbites périodiques, onde de Rayleigh, génération et détection optiques d'ondes élastiques

Title Resonances of elastical objects in elliptical and spheroidal geometries : symmetry and splitting up of resonances

Abstract Resonances for the interior problem in elastodynamics and the acoustic scattering problem are considered in elliptical and spheroidal geometries. Interest is focused on the splitting up of resonances which occurs when the symmetry is broken in the transition from the circular disc to the elliptical one (2D), and from the sphere to the spheroid (3D). From the theoretical point of view, this physical phenomenon is studied and interpreted taking into account the symmetries of the object with the help of group theory. This approach is completed by a numerical modeling and an experimental part.

As far as the two dimensional problems are concerned, the interior problem for an elliptical elastic disc (study of resonant modes) and the acoustic scattering problem for infinite elliptical elastic cylinders are studied combining modal formalism and group theory in the vectorial context of elastodynamics. The splitting up of resonances due to the circular symmetry breaking is not only theoretically observed but also experimentally for the scattering problem. The method significantly simplifies the numerical treatment of the problems studied, provides a full classification of resonances over the 4 irreducible representations of the symmetry group C_{2v} (associated with the elliptical geometry) and gives a physical interpretation of the splitting up in terms of symmetry breaking of the symmetry group $O(2)$ (invariance under rotation).

An experimental part based on ultrasonic spectroscopy complements the theoretical study of the scattering problem. A series of tank experiments is carried out in the case of aluminum elliptical cylinders immersed in water, in the frequency range $0 \leq kr \leq 50$, where kr is the reduced wave number in the fluid. The experimental results provide a very good agreement with the theoretical ones, the splitting up is observed on experimental form functions and the split resonant modes are identified on angular diagrams.

The interior problem in 3D is studied by means of an experimental approach based on the optical generation and detection of elastic waves. A series of experiments is performed on three-dimensional objects in aluminium. These objects (sphere, prolate and oblate spheroids of various eccentricity) are excited by laser impacts, and the velocity and frequency measurements are carried out by laser vibrometry. Theory and experiments are qualitatively compared. The measurements are performed in both the frequency and time domains to highlight the splitting up of resonances on one hand, and the Rayleigh wave propagating on the surface of the objects on the other hand. We emphasize two paths for this surface wave in spheroidal geometry : a circular one in the equatorial plane and an elliptical one in the meridian plane.

Finally, in the context of the interior problems in 2D and 3D, a physical interpretation of resonances in terms of geometrical paths is provided. Mode conversion is highlighted and the Rayleigh wave is identified on the periodic orbits lengths spectrum. In addition to the bifurcations of some periodic orbits, a phenomenon, new to our knowledge, appears. The orbits with mode conversion of the circular disc split in two orbits when the transition to the elliptic disc occurs. The lengths of these orbits are associated with the minimal and maximal travel paths. This observation is interpreted from Fermat's theorem. For the spheroid, orbits of the circular disc and those of the elliptical disc are recovered in the equatorial and meridian planes respectively. We also emphasize the peaks associated with the travel paths of Rayleigh wave in spheroidal geometry appearing on the periodic orbits spectrum.

Keywords Elastodynamics, resonances, acoustic scattering, ultrasonic spectroscopy, splitting up of resonances, periodic orbits, Rayleigh wave, optical generation and detection of elastic waves